Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Tercer examen parcial, 1

Viernes 17 de noviembre de 2017

1. Un electrón colisiona elasticamente con un segundo electrón que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, el radio de sus trayectorias son 1.00 cm y 2.40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme y constante de magnitud 0.044 T. Determina la energía (en keV) del electrón incidente.

Solución:

Después de la colisión tenemos para el primer electrón

$$\frac{m\, v_1^2}{r_1} = -e\, v_1\, B_0 \qquad \Longrightarrow\ m\, v_1 = -e\, r_1\, B_0 \ \Longrightarrow\ v_1 = -\frac{e}{m}\, r_1\, B_0$$

Después de la colisión tenemos para el segundo electrón

$$\frac{m\, v_2^2}{r_2} = -e\, v_2\, B_0 \qquad \Longrightarrow\ m\, v_2 = -e\, r_2\, B_0 \ \Longrightarrow\ v_2 = -\frac{e}{m}\, r_2\, B_0$$

Después de la colisión la energía cinética del primer electrón es

$$K_{1,f} = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 = \frac{1}{2}\, m \left(-\frac{e}{m}\, r_1\, B_0\right)^2 = \frac{e^2\, r_1^2\, B_0^2}{2\, m}$$

Después de la colisión la energía cinética del segundo electrón es

$$K_{2,f} = \frac{1}{2}\, m\, v_2^2 = \frac{1}{2}\, m \left(-\frac{e}{m}\, r_2\, B_0\right)^2 = \frac{e^2\, r_2^2\, B_0^2}{2\, m}$$

Por lo tanto, la energía total del sistema es

$$K_f = K_{1,f} + K_{2,f} = \frac{e^2\, r_1^2\, B_0^2}{2\, m} + \frac{e^2\, r_2^2\, B_0^2}{2\, m} = \frac{e^2\, B_0^2}{2\, m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Antes de la colisión toda esa energía estaba en el electrón incidente, por tanto,

$$K_1 = K_i = K_f \ \Longrightarrow\ K_1 = \frac{e^2\, B_0^2}{2\, m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Es decir, la energía del electrón incidente era

$$K_1 = \frac{e^2\, B_0^2}{2\, m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Tomando los datos del problema

$$K_1 = \frac{\left(1.602\times 10^{-19}\ \text{C}\right)^2 (0.044\ \text{T})^2}{2\left(9.109\times 10^{-31}\ \text{kg}\right)}\left[\left(1.00\times 10^{-2}\ \text{m}\right)^2 + \left(2.40\times 10^{-2}\ \text{m}\right)^2\right] = 1.84\times 10^{-14}\ \text{J} = 115\ \text{keV}$$

2. A dos alambres, ambos de longitud L, se les forma en un círculo y en un cuadrado, respectivamente, y cada uno de ellos transporta una corriente I. Demuestra que la espira cuadrada produce un campo magnético mayor en su centro que el que produce la espira circular.

Solución:

Usando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

podemos encontrar el campo en el eje de una espira circular de radio a y con una corriente eléctrica I. Efectivamente

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_0^{2\pi} (a\, d\theta\, (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times [(0, 0, z) - (a \cos\theta, a \sin\theta, 0)]) \big/ |(0, 0, z) - (a \cos\theta, a \sin\theta, 0)|^3 =$$

$$\frac{\mu_0 I a}{4 \pi} \int_0^{2\pi} (d\theta\, (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a \cos\theta, -a \sin\theta, z)) \big/ \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}$$

$$(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a \cos\theta, -a \sin\theta, z) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -a \cos\theta & -a \sin\theta & z \end{pmatrix} = (z \cos\theta, z \sin\theta, a)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4 \pi \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z \cos\theta, z \sin\theta, a)\, d\theta = \frac{\mu_0 I a}{4 \pi \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}\, 2 \pi a\, \hat{k}$$

El campo en el eje de la espira circular es

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}\, \hat{k}$$

En particular, en su centro

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2 a}\, \hat{k}$$

Para una espira cuadrada, vamos a calcular primero el campo que sobre el eje de la espira produce uno solo de los lados. Tomemos el ladoo horizontal inferior, es decir, aquel que tiene como ecuación $y = -\frac{a}{2}$ y $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$. En ese caso tenemos

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\hat{i}\, dx \times [(0, 0, z) - (x, -a/2, 0)]\right) \big/ |(0, 0, z) - (x, -a/2, 0)|^{3/2} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\hat{i}\, dx \times (-x, a/2, z)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\hat{i}\, dx \times \left(-x\, \hat{i} + \frac{a}{2} \hat{j} + z\, \hat{k}\right)\right) \Big/ \left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx \left(\frac{a}{2} \hat{k} - z\, \hat{j}\right)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}}\, dx = \frac{4 \sqrt{2}\, a}{\sqrt{a^2 + 2 z^2}\, \left(a^2 + 4 z^2\right)}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{a}{2}\hat{k} - z\hat{j}\right)\frac{4\sqrt{2}\,a}{\sqrt{a^2+2z^2}\,\left(a^2+4z^2\right)}$$

Es obvio que las contribuciones en los planos paralelos al de la espira se van a cancelar y tenemos finalmente que el campo en el eje de la espira es cuatro veces el de un sólo lado,

$$\vec{B}(z) = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I a^2}{\pi\sqrt{a^2+2z^2}\,\left(a^2+4z^2\right)}\hat{k}$$

En el centro de la espira

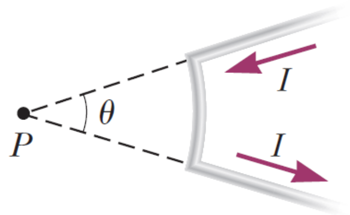
$$\vec{B}(z=0) = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}\hat{k}$$

El cociente de los dos campos es

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}}{\frac{\mu_0 I}{2a}} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

Por lo tanto el de la espira cuadrada es $\frac{4\sqrt{2}}{\pi} = 1.8$ veces mayor que el de la espira circular.

3. ¿Cuál es el campo magnético en el punto P de la figura que produce el alambre que se muestra? El punto P es el centro del arco. Evalua tus resultados cuando $\theta = 30.0\,°$, el radio del arco es 0.6 m y la corriente $I = 3.0$ A.



Solución:

Para resolver este problema debemos usar la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.$$

El campo que los dos alambres rectos producen en el punto P es cero, ya que en los dos casos $d\vec{l}$ y $\vec{r}-\vec{r}'$ son paralelos y el producto vectorial es cero. Así que debemos calcular únicamente el campo que produce el arco; colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el punto P, de tal manera que sus coordenadas son $\vec{r} = (0, 0, 0)$. Sí a es el radio del arco, entonces $\vec{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ y $d\vec{l} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, a\, d\theta$. Entonces

$$d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}') = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, a\, d\theta\times(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0) = d\theta\, a^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = d\theta\, a^2 (0, 0, 1)$$

y, evidentemente,

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = a$$

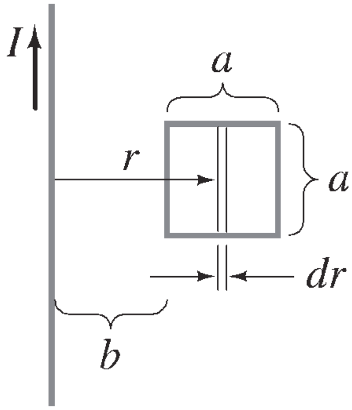
Así que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta/2}^{-\theta/2} \frac{d\theta\, a^2\, \hat{k}}{a^3} = -\frac{\mu_0 I\, \theta}{4\pi a}\hat{k}$$

Con los datos del problema,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I\, \theta}{4\pi a}\hat{k} = -0.26\,\mu\mathrm{T}\,\hat{k}$$

4. Si la espira cuadrada de la figura es jalada hacía la izquierda con una rapidez v, (a) ¿cuál es la fem inducida en el circuito?, (b) ¿en que sentido fluye la corriente eléctrica?



Solución:

(a)

El flujo a traves de la espira cuadrada es

$$\Phi = \int_{\text{espira}} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\text{espira}} \frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\left(-\hat{\theta}\right) dS = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\, a \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)$$

El cambio en el flujo respecto al tiempo es

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(-\frac{a}{b^2}\right)\frac{db}{dt}$$

pero $\frac{db}{dt} = v$, así que

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(-\frac{a}{b^2}\right)v = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi b(a+b)}$$

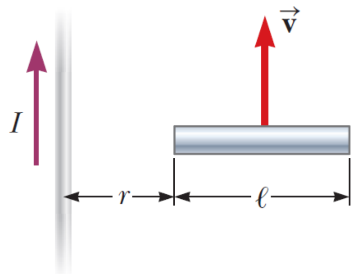
$$v*\mu_0 \frac{I}{2\pi b}a + v*\mu_0\frac{I}{2\pi(a+b)}a = \vec{B}(r) = \frac{v\mu_0 I a}{2\pi}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\right) = \frac{v\mu_0 I a}{2\pi}\,\frac{a}{b(a+b)} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi b(a+b)}$$

Así que

$$\text{fem} = -\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi b(a+b)}$$

(b) Al alejarse la espira del alambre, el campo magnético está disminuyendo y por lo tanto también el flujo, así que la corriente girará en el sentido necesario para impedir dicha disminución de flujo; eso lo logra girando en el sentido de la manecillas del reloj.

5. Una barra conductora de longitud l se mueve con velocidad $\vec{v}$ paralela a un alambre recto y muy largo por el que circula una corriente estacionaria I, tal y como se muestra en la figura. Encuentra la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta}$.

Las cargas eléctricas en la barra sentirán una fuerza

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\, v\, \hat{k}\times \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta} = \frac{q\, v\, \mu_0 I}{2\pi r} \hat{r}$$

donde hemos colocado un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje coincide con el alambre que lleva la corriente.

Así que la fuerza por unidad de carga es

$$\vec{f} = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi r} \hat{r}$$

La fem es

$$\text{fem} = \int_{\text{barra}} \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_r^{l+r} \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi r} \hat{r}\cdot\hat{r}\, dr = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi} \int_l^{l+r} \frac{1}{r}\, dr = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi} [\ln(l+r) - \ln(r)] = \frac{\mu_0 I\, v}{2\pi} \ln\left(\frac{l+r}{r}\right) = \frac{\mu_0 I\, v}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

La fuerza electromotriz generada es $\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{r}\right)$.

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Tercer examen parcial, 2

Viernes 17 de noviembre de 2017

PROBLEMAS:

1. Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme y constante de magnitud 1.00 mT. El momento angular del electrón respecto al centro del círculo es 4.00×10^{-25} kg m^2/s. Determina (a) el radio de la trayectoria circular y (b) la velocidad del electrón.

Solución:

(a) Determina el radio de la trayectoria circular

La magnitud del momento angular es $L = r\,m\,v$, de donde $v = \frac{L}{r\,m}$

Igualamos ahora la fuerza centrípeta con la fuerza de Lorentz,

$$\frac{m\,v^2}{r} = -e\,v\,B$$

Despejamos r y sustituimos el valor de la velocidad que sacamos del momento angular,

$$r = \frac{m\,v}{e\,B} = \frac{m}{e\,B}\,\frac{L}{r\,m} \implies r^2 = \frac{L}{e\,B} \implies r = \sqrt{\frac{L}{e\,B}}\,.$$

El radio de la trayectoria circular es

$$r = \sqrt{\frac{L}{e\,B}}$$

Con los datos del problema encontramos,

$$r = \sqrt{\left(\left(4.00\times10^{-25}\ \mathrm{kg\,m^2/s}\right)\Big/\left(\left(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}\right)\left(1.00\times10^{-3}\ \mathrm{T}\right)\right)\right)} = 5.0\ \mathrm{cm}$$

(b) Determina la velocidad del electrón.

Igualamos ahora la fuerza centrípeta con la fuerza de Lorentz,

$$\frac{m\,v^2}{r} = -e\,v\,B$$

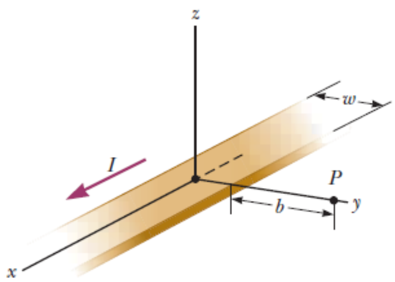
y despejamos la velocidad

$$v = \frac{e\,B\,r}{m}$$

Con los datos del problema tenemos

$$v = \left(\left(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}\right)\left(1.00\times10^{-3}\ \mathrm{T}\right)\left(5.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)\right)\Big/\left(9.109\times10^{-31}\ \mathrm{kg}\right) = 8.79\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

2. Una lámina conductora de ancho w, espesor despreciable y longitud infinita, transporta una corriente I A uniformemente distribuida a lo ancho de la lámina. Encuentra el campo magnético en todos los puntos del plano XY que no están sobre la lamina.



Solución:

Aplicando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')\, dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

a este caso, tenemos

$$\vec{K}(\vec{r}') = \frac{I}{w}\hat{i}, \quad \vec{r} = (0, w/2 + b, 0), \quad \vec{r}' = (x, y, 0), \quad \vec{r} - \vec{r}' = (-x, w/2 + b - y, 0), \quad dS = dx\, dy$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + (w/2 + b - y)^2}$$

e

$$\hat{i} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{i} \times \left(-x\,\hat{i}\right) + \hat{i} \times (w/2 + b - y)\,\hat{j} = (w/2 + b - y)\,\hat{k}$$

de donde nos queda

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi w}\hat{k} \int_{-w/2}^{w/2} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left((w/2 + b - y) \Big/ \left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\hat{k} \int_{-w/2}^{w/2} (w/2 + b - y)\, dy \int_0^{\infty} dx \Big/ \left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}$$

Ahora

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{(w/2 + b - y)^2}$$

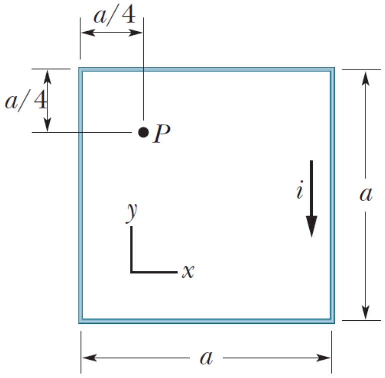
e

$$\int_{-w/2}^{w/2} \frac{w/2 + b - y}{(w/2 + b - y)^2}\, dy = \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right)$$

de donde

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right)\hat{k}$$

3. ¿Cuál es el campo magnético en el punto P de la figura adjunta? Evalua tus resultados para $I = 10.0$ A y $a = 8.0$ cm.



Solución:

Usando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

podemos encontrar el campo que produce en P cada uno de los lados de la espira cuadra. Efectivamente

$$\vec{B}_1(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \left(-\hat{\imath}\, dx\times\left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, 0\right) - (x, 0, 0)\right]\right)\Big/\left(\left(\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2\right)^{3/2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{\hat{\imath}\, dx\times\frac{3a}{4}\hat{\jmath}}{\left(\left(\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\left(\frac{5a^2}{8}-\frac{ax}{2}+x^2\right)^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45a^3}$$

$$\vec{B}_1(\vec{P}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{3a}{4}\,\hat{k}\,\frac{dx}{\left(\frac{5a^2}{8}-\frac{ax}{2}+x^2\right)^{3/2}}$$

Para el segundo tramo,

$$\vec{B}_2(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \left(-\hat{\jmath}\, dy\times\left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, 0\right) - (a, y, 0)\right]\right)\Big/\left(\left(\frac{a}{4}-a\right)^2+\left(\frac{3a}{4}-y\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\int_0^a \frac{dy}{\left(\frac{9a^2}{8}-\frac{3ay}{2}+y^2\right)^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45a^3}$$

$$\vec{B}_2(\vec{P}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{3a}{4}\,\hat{k}\,\frac{dy}{\left(\frac{9a^2}{8}-\frac{3ay}{2}+y^2\right)^{3/2}}$$

Para el tercer tramo

$$\vec{B}_3(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \left(\hat{\imath}\, dx\times\left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, 0\right) - (x, a, 0)\right]\right)\Big/\left(\left(\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{3a}{4}-a\right)^2\right)^{3/2} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a\left(\hat{\imath}\, dx\times\frac{a}{4}\hat{\jmath}\right)\Big/\left(\left(\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{3a}{4}-a\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\int_0^a\frac{dx}{\left(\frac{a^2}{8}-\frac{a\,x}{2}+x^2\right)^{3/2}}=\frac{8\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

$$\vec{B}_3(\vec{P})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{4}\hat{k}\frac{dx}{\left(\frac{a^2}{8}-\frac{a\,x}{2}+x^2\right)^{3/2}}$$

Y para el último segmento,

$$\vec{B}_4(\vec{P})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a\left(\hat{\jmath}\, dy\times\left[\left(\frac{a}{4},\frac{3a}{4},0\right)-(0,y,0)\right]\right)\Big/\left(\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}-y\right)^2\right)^{3/2}=-\vec{B}_3(\vec{P})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a\frac{a}{4}\hat{k}\frac{dy}{\left(\frac{5a^2}{8}-\frac{3\,a\,y}{2}+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_0^a\frac{dy}{\left(\frac{5a^2}{8}-\frac{3\,a\,y}{2}+y^2\right)^{3/2}}=\frac{8\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

$$\vec{B}_4(\vec{P})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{4}\hat{k}\frac{16\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

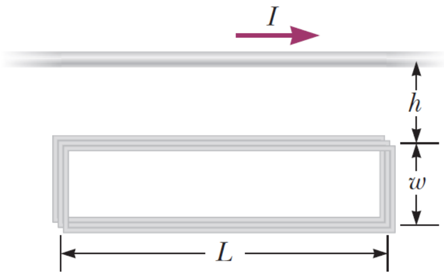
Sumando las cuatro contribuciones,

$$B(\vec{P})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{3a}{4}\left(\frac{8\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3}+\frac{8\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3}\right)+$$
$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{4}\left(\frac{8\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}+\frac{1}{5\,a^3}8\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}\right)$$
$$+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{3a}{4}\left(\frac{16\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3}\right)+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{4}\left(\frac{1}{5\,a^3}16\sqrt{2}\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{8\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right)}{3\sqrt{a^2}}$$

$$\vec{B}(\vec{P})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{8\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right)}{3\sqrt{a^2}}\hat{k}$$

$$\vec{B}(\vec{P})=-0.20\text{ mT}\,\hat{k}$$

4. Un alambre recto muy delgado y muy largo lleva una corriente eléctrica $I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi)$. El alambre yace en el plano de una bobina rectangular que tiene N vueltas del alambre, tal y como se muestra en la figura adjunta. Suponiendo que $I_{max} = 50.0$ A, $\omega = 200\,\pi\ \mathrm{s}^{-1}$, $N = 100$, $h = w = 5.00$ cm y $L = 20.0$ cm, determinar la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente que circula en el alambre.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\theta}$.

Podemos calcular el flujo a través de la bobina,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I L}{2\pi}\int_h^{w+h}\frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{h}+1\right) = \frac{\mu_0 N I_{max}\sin(\omega t+\phi) L}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{h}+1\right)$$

Sacamos ahora la variación del flujo con respecto al tiempo,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\mu_0 N I_{max}\sin(\omega t+\phi) L}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{h}+1\right) = \frac{\omega\,\mu_0 N I_{max}\cos(\omega t+\phi) L}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{h}+1\right)$$

Usamos ahora la ley de inducción de Faraday,

$$\text{fem} = -\frac{1}{2\pi}\omega\,\mu_0 N I_{max}\cos(\omega t+\phi) L\ln\left(\frac{w}{h}+1\right)$$

Utilizamos los datos del problema

$$\text{fem} = \frac{\omega\,\mu_0 N I_{max}\cos(\omega t+\phi) L}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{h}+1\right) = \frac{1}{2\pi}200\,\pi\times 4\,\pi\times 10^{-7}\times 100\times 50\times 0.2\times \mathrm{Log}\left[\frac{5}{5}+1\right]\times\cos(200\,\pi\,t+\phi)$$
$$= 4\,\pi\times 10^{-2}\times\mathrm{Log}[2]\times\cos(200\,\pi\,t+\phi) = 0.0871\times\cos(200\,\pi\,t+\phi)$$

La fem inducida es $0.0871\times\cos(200\,\pi\,t+\phi)$ en voltios y t está en segundos.

5. El radio r de una espira circular elástica crece al ritmo constante $\frac{dr}{dt} = 4.30$ cm/s; al tiempo $t = 0.0$ s el área de la espira es $A_0 = 0.285\ \mathrm{m}^2$. La espira está en un campo magnético constante y uniforme $B = 0.28$ T, cuya dirección es perpendicular al plano de la espira. Determina la fem inducida en el circuito a (a) $t = 0.0$ s y a (b) $t = 1.0$ s.

Solución:

Tenemos que $\frac{dr}{dt} = \alpha$ y por tanto, $r(t) = \alpha\, t + r_0 = \alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$

Por lo tanto, el flujo de campo magnético a través de la espira es

$$\Phi = \pi\, r^2\, B = \pi \left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)^2 B$$

y el cambio en el flujo es

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi\, B\, \frac{d r^2}{d t} = 2\, \pi\, r\, B\, \frac{d r}{d t} = 2\, \pi\, B\, \alpha \left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

Usando la ley de inducción de Faraday,

$$\mathrm{fem}(t) = 2\, \pi\, B\, \alpha \left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

(a) Así que a $t = 0.0$ s,

$$\mathrm{fem}(t) = 2\, \pi\, B\, \alpha \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$$

$$\mathrm{fem}(t) = 2\, \pi\, (0.28\ \mathrm{T})\, (0.0430\ \mathrm{m/s}) \sqrt{\frac{0.285\ \mathrm{m}^2}{\pi}} = 23\ \mathrm{mV}$$

(b) Para $t = 1.0$ s,

$$\mathrm{fem}(t = 1) = 2\, \pi\, B\, \alpha \left(\alpha + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

$$\mathrm{fem}(t) = 2\, \pi\, (0.28\ \mathrm{T})\, (0.0430\ \mathrm{m/s}) \left(0.0430\ \mathrm{m/s} \times 1.0\ \mathrm{s} + \sqrt{\frac{0.285\ \mathrm{m}^2}{\pi}}\right) = 26\ \mathrm{mV}$$

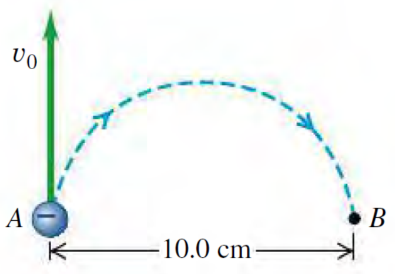
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Tercer examen parcial, 3

Viernes 17 de noviembre de 2017

PROBLEMAS:

1. Un electrón en el punto A de la figura adjunta tiene una rapidez $v_0 = 1.41 \times 10^6$ m/s. Encuentra (a) el campo magnético (como vector) que hace que el electrón siga la trayectoria semicircular de A a B, y (b) el tiempo requerido para que el electrón se mueva de A a B.



Solución:

(a)

Usando la regla de la mano derecha, es claro que para que el electrón rote en la forma en que está descrito en el dibujo el campo debe estar dirigido hacía dentro de la figura y ser perpendicular a la velocidad con que el electrón entra a la región del campo magnético. Con estos supuestos, la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza de Lorentz es

$$\frac{m\,v^2}{R} = e\,v\,B$$

de donde despejamos B obteniendo,

$$B = \frac{m\,v}{e\,R}$$

Usando los datos del problema,

$$B = \frac{m\,v}{e\,R} = \left(\left(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}\right)\left(1.41 \times 10^{6}\text{ m/s}\right)\right) \big/ \left(\left(1.60 \times 10^{-19}\text{ C}\right)\left(5.0 \times 10^{-2}\text{ m}\right)\right) = 1.60 \times 10^{-4}\text{ T}$$

(b)

Para sacar el tiempo en que el electrón da media vuelta, recordemos que

$$v = \omega\,R = \frac{2\,\pi\,R}{T}$$

y por lo tanto el periodo es

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v}$$

Como queremos que sólo de media vuelta, el tiempo será

$$T = \frac{\pi\,R}{v}$$

Usando los datos del problema, obtenemos

$$T = \frac{\pi\left(5.0 \times 10^{-2}\text{ m}\right)}{\left(1.41 \times 10^{6}\text{ m/s}\right)} = 1.11 \times 10^{-7}\text{ s}$$

2. Una lámina conductora de ancho w, espesor despreciable y longitud infinita, transporta una corriente superficial de carga eléctrica K_0 C/m a lo largo de la lámina. Calcula el campo magnético en todo el plano perpendicular a la lámina y que la bisecta.

Solución:

Colocamos nuestro sistema de coordenadas de tal manera que la lámina quede en el plano XY, la corriente vaya en la dirección X, y el plano perpendicular bisector de la lámina sea el plano XZ (de ecuación $y = 0$).

De la ley de Biot y Savart,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \, dS'.$$

Tenemos $\vec{r} = (0, 0, z)$, $\vec{r}\,' = (x', y', 0)$ con $-\infty < x' < \infty$ y $-\frac{w}{2} < y' < \frac{w}{2}$. Así que, $\vec{r} - \vec{r}\,' = (-x', -y', z)$, $\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$, que nos da

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \left(((1, 0, 0) \times (-x', -y', z)) \middle/ \left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}\right) dy'$$

Ahora

$$(1, 0, 0) \times (-x', -y', z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -x' & -y' & z \end{vmatrix} = (0, -z, -y')$$

y por lo tanto,

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \frac{(0, -z, -y')}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}} \, dy'$$

La primera componente es evidentemente cero. La tercera también es cero, debido a que el integrando es impar en y' y el intervalo de integración es simétrico, así que nos queda

$$\vec{B}(0, 0, z) = -\hat{j} \frac{z \mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \frac{dy'}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}} = -\hat{j} \frac{4 z \mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^{w/2} dy' \int_0^{\infty} \frac{dx'}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Ahora

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}} \, dx' = \frac{1}{y'^2 + z^2}$$

e

$$\int_0^{w/2} \frac{1}{y'^2 + z^2} \, dy' = \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{w}{2z}\right)$$

así que

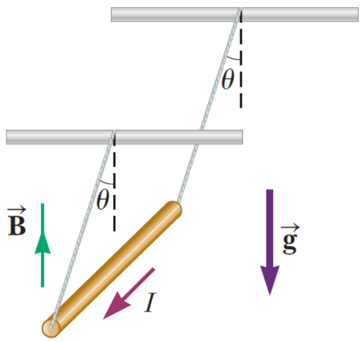
$$\vec{B}(0, 0, z) = -\hat{j} \frac{4 z \mu_0 K_0}{4\pi} \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{w}{2z}\right)$$

y finalmente

$$\vec{B}(x, 0, z) = -\hat{j} \frac{\mu_0 K_0}{\pi} \arctan\left(\frac{w}{2z}\right)$$

donde hemos agregado la variable independiente x.

3. Una varilla metálica de masa η por unidad de longitud transporta una corriente eléctrica I. La varilla cuelga en sus extremos de dos alambres en un campo magnético vertical como se muestra en la figura. Los alambres hacen un ángulo θ con la vertical cuando todo el conjunto está en equilibrio. Determina la magnitud del campo magnético.



Solución:

Sobre la barra actúa la fuerza magnética $F = I\,B\,L$. También actúa la fuerza gravitacional, $w = m\,g = \eta\,L\,g$. Y actúa también la tensión de la cuerda. Haciendo un diagrama de fuerza e igualando las components correspondientes,

$$T\cos\theta = w = \eta\,L\,g, \qquad T\sin\theta = I\,B\,L$$

de donde

$$\frac{I\,B\,L}{\sin\theta} = \frac{\eta\,L\,g}{\cos\theta}$$

y despejando B,

$$B = \frac{\eta\,g}{I}\tan\theta$$

4. Un circuito de alambre conductor tiene la forma de una circunferencia con un diámetro de 25 cm y una resistencia eléctrica de 150 Ω. Inicialment está en un campo magnético de 0.40 T con su plano perpendicular a $\vec{B}$. La espira circular es sacada del campo magnético es 120 ms. Calcula la energía disipada en el proceso.

Solución:

Al sacar la espira del campo magnético cambiamos el flujo de campo magnético a través de ella, y por tanto generamos una corriente eléctrica. Si llamamos a al radio de la espira, el flujo original a través de ella es $\Phi_i = \pi\, a^2\, B$; el flujo final es cero, así que el cambio de flujo es

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi\, a^2\, B}{\Delta t}.$$

Por la ley de inducción de Faraday, la fem inducida en el circuito es

$$\text{fem} = -\frac{\pi\, a^2\, B}{\Delta t}.$$

y la corriente que fluye en la espira es

$$I = -\frac{\pi\, a^2\, B}{\Delta t\, R}.$$

La potencia disipada en el proceso es

$$P = I^2\, R = \frac{\pi^2\, a^4\, B^2}{R\, (\Delta t)^2}$$

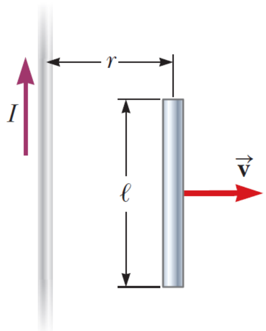
y por lo tanto, la energía disipada es

$$W = P\, \Delta t = \frac{\pi^2\, a^4\, B^2}{R\, \Delta t}$$

Con los datos del problema, tenemos

$$W = \frac{\pi^2\, a^4\, B^2}{R\, \Delta t} = \frac{\pi^2 \left(\frac{25}{2}\, 10^{-2}\ \text{m}\right)^4 (0.40\ \text{T})^2}{(150\ \Omega)\, (0.120\ \text{s})} = 0.000021\ \text{J} = 21\ \mu\text{J}$$

5. Una barra conductora se mueve con velocidad constante en una dirección perpendicular de un alambre recto muy largo que lleva una corriente I tal y como se muestra en la figura adjunta. Determina la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\theta}$.

Las cargas eléctricas en la barra sentirán una fuerza

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\,v\,\hat{r}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\theta} = \frac{q\,v\,\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{k}$$

donde hemos colocado un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje coincide con el alambre que lleva la corriente.

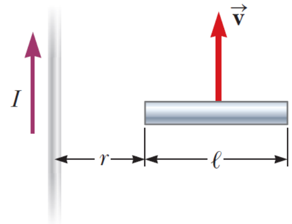
La fem es

$$\text{fem} = \int_{\text{barra}}\frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{l} = \int_0^l \frac{v\,\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}\cdot\hat{k}\,dz = \frac{v\,\mu_0 I\,l}{2\pi r}$$

La fuerza electromotriz generada es $\frac{v\,\mu_0 I\,l}{2\pi r}$.

PROBLEMAS:

1. Una barra conductora de longitud l se mueve con velocidad $\vec{v}$ paralela a un alambre recto y muy largo por el que circula una corriente estacionaria I, tal y como se muestra en la figura. Encuentra la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta}$.

Las cargas eléctricas en la barra sentirán una fuerza

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\, v\, \hat{k}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\theta} = \frac{q\, v\, \mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}$$

donde hemos colocado un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje coincide con el alambre que lleva la corriente.

Así que la fuerza por unidad de carga es

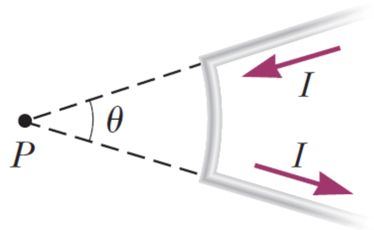
$$\vec{f} = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}$$

La fem es

$$\text{fem} = \int_{\text{barra}} \frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{l} = \int_r^{l+r} \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}\cdot\hat{r}\, dr = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi}\int_l^{l+r}\frac{1}{r}\, dr = \frac{v\, \mu_0 I}{2\pi}[\ln(l+r) - \ln(r)] = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(\frac{l+r}{r}\right) = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l}{r}\right)$$

La fuerza electromotriz generada es $\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l}{r}\right)$.

2. ¿Cuál es el campo magnético en el punto P de la figura que produce el alambre que se muestra? El punto P es el centro del arco. Evalua tus resultados cuando $\theta = 45.0\,°$, el radio del arco es 0.8 m y la corriente $I = 2.0$ A.



Solución:

Para resolver este problema debemos usar la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

El campo que los dos alambres rectos producen en el punto P es cero, ya que en los dos casos $d\vec{l}$ y $\vec{r} - \vec{r}'$ son paralelos y el producto vectorial es cero. Así que debemos calcular únicamente el campo que produce el arco; colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el punto P, de tal manera que sus coordenadas son $\vec{r} = (0, 0, 0)$. Sí a es el radio del arco, entonces $\vec{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ y $d\vec{l} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, a\, d\theta$. Entonces

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, a\, d\theta \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0) = d\theta\, a^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = d\theta\, a^2 (0, 0, 1)$$

y, evidentemente,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = a$$

Así que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta/2}^{-\theta/2} \frac{d\theta\, a^2\, \hat{k}}{a^3} = -\frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a} \hat{k}$$

Con los datos del problema,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a} \hat{k} = -0.19\, \mu\mathrm{T}\, \hat{k}$$

3. Un electrón colisiona elasticamente con un segundo electrón que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, el radio de sus trayectorias son 2.00 cm y 1.40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme y constante de magnitud 0.12 T. Determina la energía (en keV) del electrón incidente.

Solución:

Después de la colisión tenemos para el primer electrón

$$\frac{m\,v_1^2}{r_1} = -e\,v_1\,B_0 \quad \Longrightarrow\; m\,v_1 = -e\,r_1\,B_0 \;\Longrightarrow\; v_1 = -\frac{e}{m}\,r_1\,B_0$$

Después de la colisión tenemos para el segundo electrón

$$\frac{m\,v_2^2}{r_2} = -e\,v_2\,B_0 \quad \Longrightarrow\; m\,v_2 = -e\,r_2\,B_0 \;\Longrightarrow\; v_2 = -\frac{e}{m}\,r_2\,B_0$$

Después de la colisión la energía cinética del primer electrón es

$$K_{1,f} = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,m\left(-\frac{e}{m}\,r_1\,B_0\right)^2 = \frac{e^2\,r_1^2\,B_0^2}{2\,m}$$

Después de la colisión la energía cinética del segundo electrón es

$$K_{2,f} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 = \frac{1}{2}\,m\left(-\frac{e}{m}\,r_2\,B_0\right)^2 = \frac{e^2\,r_2^2\,B_0^2}{2\,m}$$

Por lo tanto, la energía total del sistema es

$$K_f = K_{1,f} + K_{2,f} = \frac{e^2\,r_1^2\,B_0^2}{2\,m} + \frac{e^2\,r_2^2\,B_0^2}{2\,m} = \frac{e^2\,B_0^2}{2\,m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Antes de la colisión toda esa energía estaba en el electrón incidente, por tanto,

$$K_1 = K_i = K_f \;\Longrightarrow\; K_1 = \frac{e^2\,B_0^2}{2\,m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Es decir, la energía del electrón incidente era

$$K_1 = \frac{e^2\,B_0^2}{2\,m}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

Tomando los datos del problema

$$K_1 = \frac{\left(1.602\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\right)^2 (0.12\ \mathrm{T})^2}{2\left(9.109\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)}\left[\left(2.00\times 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2 + \left(1.40\times 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2\right] = 1.21\times 10^{-13}\ \mathrm{J} = 755\ \mathrm{keV}$$

4. A dos alambres, ambos de longitud L, se les forma en un círculo y en un cuadrado, respectivamente, y cada uno de ellos transporta una corriente I. Demuestra que la espira cuadrada produce un campo magnético mayor en su centro que el que produce la espira circular.

Solución:

Usando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

podemos encontrar el campo en el eje de una espira circular de radio a y con una corriente eléctrica I. Efectivamente

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} (a\, d\theta\, (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times [(0, 0, z) - (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)]) \big/ |(0, 0, z) - (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)|^3 =$$

$$\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} (d\theta\, (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)) \big/ (a^2 + z^2)^{3/2}$$

$$(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & z \end{pmatrix} = (z\cos\theta, z\sin\theta, a)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z\cos\theta, z\sin\theta, a)\, d\theta = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}\, 2\pi a\, \hat{k}$$

El campo en el eje de la espira circular es

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}\, \hat{k}$$

En particular, en su centro

$$\vec{B}(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\, \hat{k}$$

Para una espira cuadrada, vamos a calcular primero el campo que sobre el eje de la espira produce uno solo de los lados. Tomemos el ladoo horizontal inferior, es decir, aquel que tiene como ecuación $y = -\frac{a}{2}$ y $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$. En ese caso tenemos

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\hat{i}\, dx \times [(0, 0, z) - (x, -a/2, 0)]\right) \big/ |(0, 0, z) - (x, -a/2, 0)|^{3/2} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\hat{i}\, dx \times (-x, a/2, z)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\hat{i}\, dx \times \left(-x\,\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + z\,\hat{k}\right)\right) \Big/ \left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx \left(\frac{a}{2}\hat{k} - z\,\hat{j}\right)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}}\, dx = \frac{4\sqrt{2}\, a}{\sqrt{a^2 + 2z^2}\, (a^2 + 4z^2)}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{a}{2}\hat{k} - z\,\hat{j}\right)\frac{4\sqrt{2}\,a}{\sqrt{a^2+2z^2}\,\left(a^2+4z^2\right)}$$

Es obvio que las contribuciones en los planos paralelos al de la espira se van a cancelar y tenemos finalmente que el campo en el eje de la espira es cuatro veces el de un sólo lado,

$$\vec{B}(z) = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I a^2}{\pi\sqrt{a^2+2z^2}\,\left(a^2+4z^2\right)}\hat{k}$$

En el centro de la espira

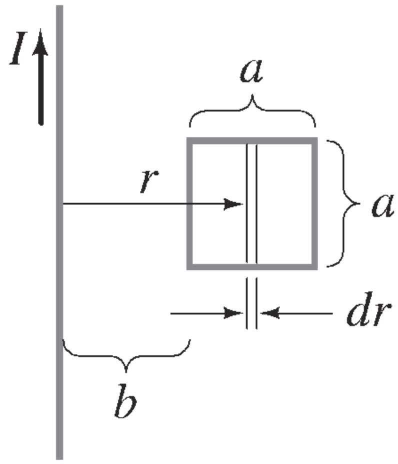
$$\vec{B}(z=0) = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}\hat{k}$$

El cociente de los dos campos es

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}}{\frac{\mu_0 I}{2a}} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

Por lo tanto el de la espira cuadrada es $\frac{4\sqrt{2}}{\pi} = 1.8$ veces mayor que el de la espira circular.

5. Si la espira cuadrada de la figura es jalada hacía la izquierda con una rapidez v, (a) ¿cuál es la fem inducida en el circuito?, (b) ¿en que sentido fluye la corriente eléctrica?



Solución:

(a)

El flujo a traves de la espira cuadrada es

$$\Phi = \int_{\text{espira}} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi}\int_{\text{espira}} \frac{\hat{\theta}}{r}\cdot\left(-\hat{\theta}\right) dS = -\frac{\mu_0 I}{2\,\pi}\, a \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I\, a}{2\,\pi}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)$$

El cambio en el flujo respecto al tiempo es

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I\, a}{2\,\pi}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(-\frac{a}{b^2}\right)\frac{db}{dt}$$

pero $\frac{db}{dt} = v$, así que

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I\, a}{2\,\pi}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(-\frac{a}{b^2}\right) v = \frac{\mu_0 I\, a^2\, v}{2\,\pi\, b\,(a+b)}$$

$$v*\mu_0\,\frac{I}{2\,\pi\, b}\, a + v*\mu_0\,\frac{I}{2\,\pi\,(a+b)}\, a = \vec{B}(r) = \frac{v\,\mu_0 I\, a}{2\,\pi}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\right) = \frac{v\,\mu_0 I\, a}{2\,\pi}\,\frac{a}{b\,(a+b)} = \frac{\mu_0 I\, a^2\, v}{2\,\pi\, b\,(a+b)}$$

Así que

$$\text{fem} = -\frac{\mu_0 I\, a^2\, v}{2\,\pi\, b\,(a+b)}$$

(b) Al alejarse la espira del alambre, el campo magnético está disminuyendo y por lo tanto también el flujo, así que la corriente girará en el sentido necesario para impedir dicha disminución de flujo; eso lo logra girando en el sentido de las manecillas del reloj.

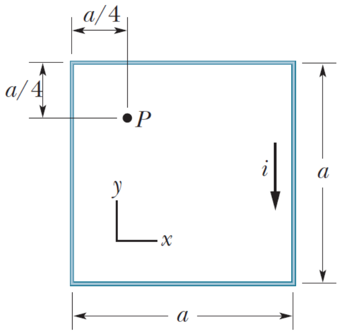
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Tercer examen parcial, 5

Viernes 17 de noviembre de 2017

PROBLEMAS:

1. ¿Cuál es el campo magnético en el punto P de la figura adjunta? Evalua tus resultados para $I = 4.0$ A y $a = 10.0$ cm.



Solución:

Usando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

podemos encontrar el campo que produce en P cada uno de los lados de la espira cuadra. Efectivamente

$$\vec{B}_1(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \left(-\hat{i}\, dx \times \left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, 0\right) - (x, 0, 0)\right]\right) \Big/ \left(\left(\frac{a}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2\right)^{3/2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \frac{\hat{i}\, dx \times \frac{3a}{4}\hat{j}}{\left(\left(\frac{a}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\left(\frac{5a^2}{8} - \frac{ax}{2} + x^2\right)^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}\left(5 + \sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\, a^3}$$

$$\vec{B}_1(\vec{P}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{3a}{4} \hat{k} \frac{dx}{\left(\frac{5a^2}{8} - \frac{ax}{2} + x^2\right)^{3/2}}$$

Para el segundo tramo,

$$\vec{B}_2(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \left(-\hat{j}\, dy \times \left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, 0\right) - (a, y, 0)\right]\right) \Big/ \left(\left(\frac{a}{4} - a\right)^2 + \left(\frac{3a}{4} - y\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\int_0^a \frac{dy}{\left(\frac{9a^2}{8} - \frac{3ay}{2} + y^2\right)^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}\left(5 + \sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\, a^3}$$

$$\vec{B}_2(\vec{P}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{3a}{4} \hat{k} \frac{dy}{\left(\frac{9a^2}{8} - \frac{3ay}{2} + y^2\right)^{3/2}}$$

Para el tercer tramo

$$\vec{B}_3(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi} \int_0^a \left(\hat{\imath}\; dx \times \left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3\,a}{4}, 0\right) - (x, a, 0)\right]\right) \Big/ \left(\left(\frac{a}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{3\,a}{4} - a\right)^2\right)^{3/2} = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi} \int_0^a \frac{\hat{\imath}\; dx \times \frac{a}{4}\,\hat{\jmath}}{\left(\left(\frac{a}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{3\,a}{4} - a\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\left(\frac{a^2}{8} - \frac{a\,x}{2} + x^2\right)^{3/2}} = \frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

$$\vec{B}_3(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{a}{4}\,\hat{k}\,\frac{dx}{\left(\frac{a^2}{8} - \frac{a\,x}{2} + x^2\right)^{3/2}}$$

Y para el último segmento,

$$\vec{B}_4(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi} \int_0^a \left(\hat{\jmath}\; dy \times \left[\left(\frac{a}{4}, \frac{3\,a}{4}, 0\right) - (0, y, 0)\right]\right) \Big/ \left(\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\,a}{4} - y\right)^2\right)^{3/2} = -\vec{B}_3(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi} \int_0^a \frac{a}{4}\,\hat{k}\,\frac{dy}{\left(\frac{5\,a^2}{8} - \frac{3\,a\,y}{2} + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_0^a \frac{dy}{\left(\frac{5\,a^2}{8} - \frac{3\,a\,y}{2} + y^2\right)^{3/2}} = \frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

$$\vec{B}_4(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{a}{4}\,\hat{k}\,\frac{16\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}$$

Sumando las cuatro contribuciones,

$$B(\vec{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{3\,a}{4}\left(\frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + \sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3} + \frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + \sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3}\right) +$$
$$\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{a}{4}\left(\frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3} + \frac{8\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}\right)$$
$$+\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{3\,a}{4}\left(\frac{16\,\sqrt{2}\,\left(5 + \sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{45\,a^3}\right) + \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{a}{4}\left(\frac{16\,\sqrt{2}\,\left(5 + 3\,\sqrt{5}\right)\sqrt{a^2}}{5\,a^3}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{8\,\sqrt{2}\,\left(2 + \sqrt{5}\right)}{3\,\sqrt{a^2}}$$

$$\vec{B}(\vec{P}) = -\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\,\frac{8\,\sqrt{2}\,\left(2 + \sqrt{5}\right)}{3\,\sqrt{a^2}}\,\hat{k}$$

$$\vec{B}(\vec{P}) = -63.9\;\mu\mathrm{T}\;\hat{k}$$

2. Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme y constante de magnitud 5.00 mT. El momento angular del electrón respecto al centro del círculo es 6.00×10^{-25} kg m^2/s. Determina (a) el radio de la trayectoria circular y (b) la velocidad del electrón.

Solución:

(a) Determina el radio de la trayectoria circular

La magnitud del momento angular es $L = r\,m\,v$, de donde $v = \frac{L}{r\,m}$

Igualamos ahora la fuerza centrípeta con la fuerza de Lorentz,

$$\frac{m\,v^2}{r} = -e\,v\,B$$

Despejamos r y sustituimos el valor de la velocidad que sacamos del momento angular,

$$r = \frac{m\,v}{e\,B} = \frac{m}{e\,B}\,\frac{L}{r\,m} \implies r^2 = \frac{L}{e\,B} \implies r = \sqrt{\frac{L}{e\,B}}\,.$$

El radio de la trayectoria circular es

$$r = \sqrt{\frac{L}{e\,B}}$$

Con los datos del problema encontramos,

$$r = \sqrt{\left(\left(6.00\times10^{-25}\ \text{kg m}^2/\text{s}\right)/\left(\left(1.602\times10^{-19}\ \text{C}\right)\left(5.00\times10^{-3}\ \text{T}\right)\right)\right)} = 2.7\ \text{cm}$$

(b) Determina la velocidad del electrón.

Igualamos ahora la fuerza centrípeta con la fuerza de Lorentz,

$$\frac{m\,v^2}{r} = -e\,v\,B$$

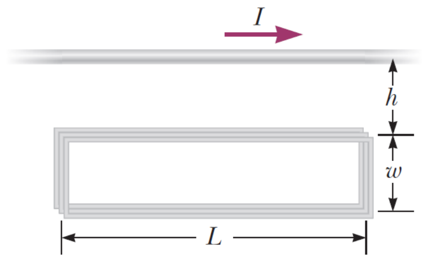
y despejamos la velocidad

$$v = \frac{e\,B\,r}{m}$$

Con los datos del problema tenemos

$$v = \left(\left(1.602\times10^{-19}\ \text{C}\right)\left(5.00\times10^{-3}\ \text{T}\right)\left(2.7\times10^{-2}\ \text{m}\right)\right)/\left(9.109\times10^{-31}\ \text{kg}\right) = 2.41\times10^{7}\ \text{m/s}$$

3. Un alambre recto muy delgado y muy largo lleva una corriente eléctrica $I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi)$. El alambre yace en el plano de una bobina rectangular que tiene N vueltas del alambre, tal y como se muestra en la figura adjunta. Suponiendo que $I_{max} = 30.0$ A, $\omega = 300\,\pi$ s^{-1}, $N = 200$, $h = w = 8.00$ cm y $L = 12.0$ cm, determinar la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente que circula en el alambre.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta}$.

Podemos calcular el flujo a través de la bobina,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I L}{2\,\pi} \int_h^{w+h} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right) = \frac{\mu_0 N I_{max} \sin(\omega t + \phi) L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right)$$

Sacamos ahora la variación del flujo con respecto al tiempo,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\mu_0 N I_{max} \sin(\omega t + \phi) L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right) = \frac{\omega \mu_0 N I_{max} \cos(\omega t + \phi) L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right)$$

Usamos ahora la ley de inducción de Faraday,

$$\text{fem} = -\frac{\omega \mu_0 N I_{max} \cos(\omega t + \phi) L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right)$$

Utilizamos los datos del problema

$$\text{fem} = \frac{\omega \mu_0 N I_{max} \cos(\omega t + \phi) L}{2\,\pi} \ln\left(\frac{w}{h} + 1\right) = \frac{1}{2\,\pi} 300\,\pi \times 4\,\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 30 \times 0.12 \times \text{Log}\left[\frac{8.0}{8.0} + 1\right] \times \cos(300\,\pi\, t + \phi)$$
$$= 0.135717 \times \text{Log}[2] \times \cos(300\,\pi\, t + \phi) = 0.0941 \cos(300\,\pi\, t + \phi)$$

La fem inducida es $0.0941 \cos(300\,\pi\, t + \phi)$ en voltios y t está en segundos.

4. El radio r de una espira circular elástica crece al ritmo constante $\frac{dr}{dt} = 7.00$ cm/s; al tiempo $t = 0.0$ s el área de la espira es $A_0 = 0.5$ m^2. La espira está en un campo magnético constante y uniforme $B = 0.8$ T, cuya dirección es perpendicular al plano de la espira. Determina la fem inducida en el circuito a (a) $t = 0.0$ s y a (b) $t = 2.0$ s.

Solución:

Tenemos que $\frac{dr}{dt} = \alpha$ y por tanto, $r(t) = \alpha\, t + r_0 = \alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$

Por lo tanto, el flujo de campo magnético a través de la espira es

$$\Phi = \pi\, r^2\, B = \pi\left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)^2 B$$

y el cambio en el flujo es

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi\, B\, \frac{d r^2}{dt} = 2\,\pi\, r\, B\, \frac{dr}{dt} = 2\,\pi\, B\,\alpha\left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

Usando la ley de inducción de Faraday,

$$\mathrm{fem}(t) = 2\,\pi\, B\,\alpha\left(\alpha\, t + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

(a) Así que a $t = 0.0$ s,

$$\mathrm{fem}(t) = 2\,\pi\, B\,\alpha\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$$

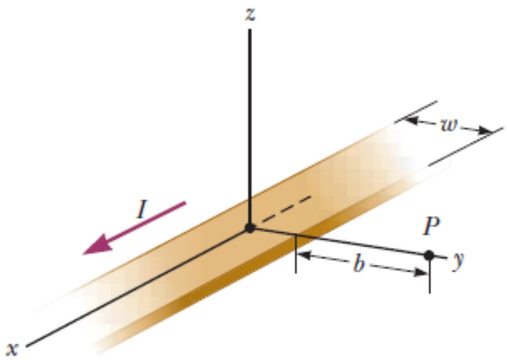
$$\mathrm{fem}(t = 0.0\ \mathrm{s}) = 140\ \mathrm{mV}$$

(b) Para $t = 2.0$ s,

$$\mathrm{fem}(t = 2.0\ \mathrm{s}) = 2\,\pi\, B\,\alpha\left(\alpha + \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\right)$$

$$\mathrm{fem}(t = 2.0\ \mathrm{s}) = 190\ \mathrm{mV}$$

5. Una lámina conductora de ancho w, espesor despreciable y longitud infinita, transporta una corriente I A uniformemente distribuida a lo ancho de la lámina. Encuentra el campo magnético en todos los puntos del plano XY que no están sobre la lamina.



Solución:

Aplicando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')\,dS' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

a este caso, tenemos

$$\vec{K}(\vec{r}\,') = \frac{I}{w}\,\hat{i}, \quad \vec{r} = (0,\, w/2 + b,\, 0), \quad \vec{r}\,' = (x,\, y,\, 0), \quad \vec{r} - \vec{r}\,' = (-x,\, w/2 + b - y,\, 0), \quad dS = dx\,dy$$
$$\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \sqrt{x^2 + (w/2 + b - y)^2}$$

e

$$\hat{i} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = \hat{i} \times \left(-x\,\hat{i}\right) + \hat{i} \times (w/2 + b - y)\,\hat{j} = (w/2 + b - y)\,\hat{k}$$

de donde nos queda

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi\,w}\,\hat{k}\int_{-w/2}^{w/2} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left((w/2 + b - y)\Big/\left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}\right)$$
$$= \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,w}\,\hat{k}\int_{-w/2}^{w/2} (w/2 + b - y)\,dy \int_0^{\infty} dx\Big/\left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}$$

Ahora

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[x^2 + (w/2 + b - y)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{(w/2 + b - y)^2}$$

e

$$\int_{-w/2}^{w/2} \frac{w/2 + b - y}{(w/2 + b - y)^2}\,dy = \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right)$$

de donde

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,w}\ln\left(1 + \frac{w}{b}\right)\hat{k}$$

PROBLEMAS:

1. Una lámina conductora de ancho w, espesor despreciable y longitud infinita, transporta una corriente superficial de carga eléctrica K_0 C/m a lo largo de la lámina. Calcula el campo magnético en todo el plano perpendicular a la lámina y que la bisecta.

Solución:

Colocamos nuestro sistema de coordenadas de tal manera que la lámina quede en el plano XY, la corriente vaya en la dirección X, y el plano perpendicular bisector de la lámina sea el plano XZ (de ecuación $y = 0$).

De la ley de Biot y Savart,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\, dS'.$$

Tenemos $\vec{r} = (0, 0, z)$, $\vec{r}' = (x', y', 0)$ con $-\infty < x' < \infty$ y $-\frac{w}{2} < y' < \frac{w}{2}$. Así que, $\vec{r}-\vec{r}' = (-x', -y', z)$, $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$, que nos da

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \frac{(1, 0, 0)\times(-x', -y', z)}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}}\, dy'$$

Ahora

$$(1, 0, 0)\times(-x', -y', z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -x' & -y' & z \end{vmatrix} = (0, -z, -y')$$

y por lo tanto,

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \frac{(0, -z, -y')}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}}\, dy'$$

La primera componente es evidentemente cero. La tercera también es cero, debido a que el integrando es impar en y' y el intervalo de integración es simétrico, así que nos queda

$$\vec{B}(0, 0, z) = -\hat{j}\, \frac{z\, \mu_0 K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-w/2}^{w/2} \frac{dy'}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}} = -\hat{j}\, \frac{4\, z\, \mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^{w/2} dy' \int_0^{\infty} \frac{dx'}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Ahora

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}}\, dx' = \frac{1}{y'^2 + z^2}$$

e

$$\int_0^{w/2} \frac{1}{y'^2 + z^2}\, dy' = \frac{1}{z} \arctan\!\left(\frac{w}{2z}\right)$$

así que

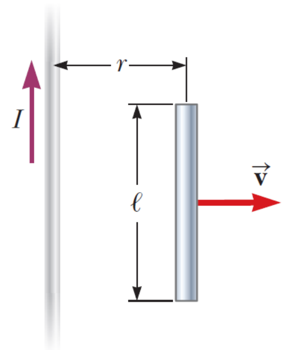
$$\vec{B}(0, 0, z) = -\hat{j}\, \frac{4\, z\, \mu_0 K_0}{4\pi}\, \frac{1}{z} \arctan\!\left(\frac{w}{2z}\right)$$

y finalmente

$$\vec{B}(x,\,0,\,z) = -\hat{j}\,\frac{\mu_0\,K_0}{\pi}\,\arctan\!\left(\frac{w}{2\,z}\right)$$

donde hemos agregado la variable independiente x.

2. Una barra conductora se mueve con velocidad constante en una dirección perpendicular de un alambre recto muy largo que lleva una corriente I tal y como se muestra en la figura adjunta. Determina la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Solución:

Sabemos que el campo magnético creado por una corriente I en un alambre recto infinito es $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta}$.

Las cargas eléctricas en la barra sentirán una fuerza

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\, v\, \hat{r}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\theta} = \frac{q\, v\, \mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{k}$$

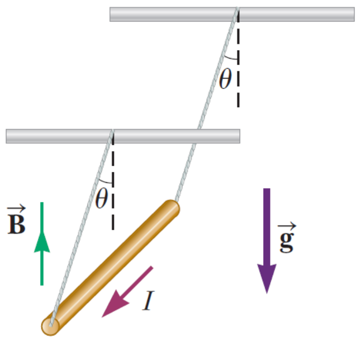
donde hemos colocado un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje coincide con el alambre que lleva la corriente.

La fem es

$$\text{fem} = \int_{\text{barra}} \frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{l} = \int_0^l \frac{v\,\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}\cdot\hat{k}\, dz = \frac{v\,\mu_0 I\, l}{2\pi r}$$

La fuerza electromotriz generada es $\frac{v\,\mu_0 I\, l}{2\pi r}$.

3. Una varilla metálica de masa η por unidad de longitud transporta una corriente eléctrica I. La varilla cuelga en sus extremos de dos alambres en un campo magnético vertical como se muestra en la figura. Los alambres hacen un ángulo θ con la vertical cuando todo el conjunto está en equilibrio. Determina la magnitud del campo magnético.



Solución:

Sobre la barra actúa la fuerza magnética $F = I\,B\,L$. También actúa la fuerza gravitacional, $w = m\,g = \eta\,L\,g$. Y actúa también la tensión de la cuerda. Haciendo un diagrama de fuerza e igualando las components correspondientes,

$$T\cos\theta = w = \eta\,L\,g, \qquad T\sin\theta = I\,B\,L$$

de donde

$$\frac{I\,B\,L}{\sin\theta} = \frac{\eta\,L\,g}{\cos\theta}$$

y despejando B,

$$B = \frac{\eta\,g}{I}\tan\theta$$

4. Un circuito de alambre conductor tiene la forma de una circunferencia con un diámetro de 50 cm y una resistencia eléctrica de 50 Ω. Inicialment está en un campo magnético de 0.90 T con su plano perpendicular a $\vec{B}$. La espira circular es sacada del campo magnético es 100 ms. Calcula la energía disipada en el proceso.

Solución:

Al sacar la espira del campo magnético cambiamos el flujo de campo magnético a través de ella, y por tanto generamos una corriente eléctrica. Si llamamos a al radio de la espira, el flujo original a través de ella es $\Phi_i = \pi a^2 B$; el flujo final es cero, así que el cambio de flujo es

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi a^2 B}{\Delta t}.$$

Por la ley de inducción de Faraday, la fem inducida en el circuito es

$$\text{fem} = -\frac{\pi a^2 B}{\Delta t}.$$

y la corriente que fluye en la espira es

$$I = -\frac{\pi a^2 B}{\Delta t\, R}.$$

La potencia disipada en el proceso es

$$P = I^2 R = \frac{\pi^2 a^4 B^2}{R\,(\Delta t)^2}$$

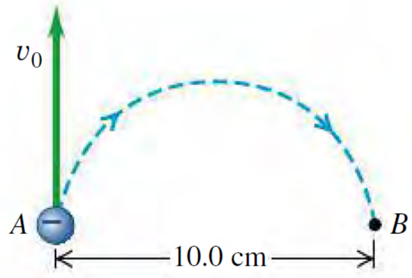
y por lo tanto, la energía disipada es

$$W = P\,\Delta t = \frac{\pi^2 a^4 B^2}{R\,\Delta t}$$

Con los datos del problema, tenemos

$$W = \frac{\pi^2 a^4 B^2}{R\,\Delta t} = 6.25\ \text{mJ}$$

5. Un electrón en el punto A de la figura adjunta tiene una rapidez $v_0 = 2.9 \times 10^6$ m/s. Encuentra (a) el campo magnético (como vector) que hace que el electrón siga la trayectoria semicircular de A a B, y (b) el tiempo requerido para que el electrón se mueva de A a B.



Solución:

(a)

Usando la regla de la mano derecha, es claro que para que el electrón rote en la forma en que está descrito en el dibujo el campo debe estar dirigido hacía dentro de la figura y ser perpendicular a la velocidad con que el electrón entra a la región del campo magnético. Con estos supuestos, la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza de Lorentz es

$$\frac{m v^2}{R} = e v B$$

de donde despejamos B obteniendo,

$$B = \frac{m v}{e R}$$

Usando los datos del problema,

$$B = \frac{m v}{e R} = \left(\left(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)\left(2.9 \times 10^6\ \mathrm{m/s}\right)\right) / \left(\left(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}\right)\left(5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)\right) = 3.30 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

(b)

Para sacar el tiempo en que el electrón da media vuelta, recordemos que

$$v = \omega R = \frac{2 \pi R}{T}$$

y por lo tanto el periodo es

$$T = \frac{2 \pi R}{v}$$

Como queremos que sólo de media vuelta, el tiempo será

$$T = \frac{\pi R}{v}$$

Usando los datos del problema, obtenemos

$$T = \frac{\pi \left(5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)}{\left(2.9 \times 10^6\ \mathrm{m/s}\right)} = 5.42 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$$