Curso de Mecánica Cuántica

15 de enero al 11 de mayo de 2018

Soluciones de la tarea 1. Martes 23 de enero de 2018

Exercise 1.1
Consider a metal that is being welded.
(a) How hot is the metal when it radiates most strongly at 490 nm?
(b) Assuming that it radiates like a blackbody, calculate the intensity of its radiation.

Solución:

(a)

La expresión (1.15) del Zettili

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4.9663k}\frac{1}{T} = \frac{2898.9 \times 10^{-6} \text{ m K}}{T}$$

nos da la longitud de onda que corresponde al máximo de la densidad de energía de Planck.

En este caso el máximo de emisión ocurre a una longitud de onda de 490 nm. Despejando T y sustituyendo λ,

$$T = \frac{2898.9 \times 10^{-6} \text{ m K}}{490 \text{ nm}} = 5916.12 \text{ K}$$

(b)

La intensidad de la radiación está dada por la ley de Stefan-Boltzmann $\mathcal{P} = \sigma T^4$, donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}. Por tanto,

$$\mathcal{P} = \sigma T^4 = \left(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}\right) (5916.12 \text{ K})^4 = 6.95 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

Exercise 1.5
The intensity reaching the surface of the Earth from the Sun is about 1.36 kW m^{-2}. Assuming the Sun to be a sphere (of radius 6.96×10^8 m) that radiates like a blackbody, estimate
(a) the temperature at its surface and the wavelength of its strongest radiation, and
(b) the total power radiated by the Sun (the Earth–Sun distance is 1.5×10^{11} m).

(a) Dado que con los datos proporcionados en el problema es posible calcular la intensidad de la radiación emitida por el Sol, si usamos la ley de Stefan-Boltzmann $\mathcal{P} = \sigma T^4$, podemos calcular trivialmente la temperatura.

La potencia total radiada por el Sol está dada como $P = 4\pi d^2 I_e$, donde d es la distancia de la Tierra a el Sol e I_e es la intensidad de la radiación solar sobre la órbita de la tierra. Así que

$$P = 4\pi\left(1.50 \times 10^{11} \text{ m}\right)^2 \left(1.36 \text{ kW m}^{-2}\right) = 3.83 \times 10^{26}\, W.$$

La intensidad de la radiación solar en su superficie será entonces

$$\mathcal{P} = \frac{P}{4\pi R^2},$$

siendo R el radio del Sol. Tenemos entonces

$$\mathcal{P} = \frac{3.83\times 10^{26}\ \text{W}}{4\,\pi\,(6.96\times 10^{8}\ \text{m})^2} = 6.29\times 10^{7}\ \text{W m}^{-2}.$$

Por tanto, la temperatura será

$$T = \left(\frac{\mathcal{P}}{\sigma}\right)^{1/4} = \left((6.29\times 10^{7}\ \text{W m}^{-2})/(5.67\times 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4})\right)^{1/4} = 5771\ K.$$

Por último, la longitud del máximo de emisón está dada por

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2898.9\times 10^{-6}\ \text{m K}}{T} = \frac{2898.9\times 10^{-6}\ \text{m K}}{5771\ \text{K}} = 5.023\times 10^{-7}\ m.$$

Exercise 1.10

A 0.7 MeV photon scatters from an electron initially at rest. If the photon scatters at an angle of 35°, calculate

(a) the energy and wavelength of the scattered photon,
(b) the kinetic energy of the recoiling electron, and
(c) the angle at which the electron recoils.

Solución:

Este problema es igual al problema resuelto 1.5 del Zettili, página 57 (74).

(a)

Usando la expresión (1.36) del Zettili, $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, podemos despejar la longitud de onda λ' del foton dispersado,

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e\, c}(1-\cos\theta).$$

La longitud de onda del foton incidente es $\lambda = \frac{h\,c}{E_i}$, siendo E_i su energía; entonces $\lambda = \frac{(6.63\times 10^{-34}\ \text{J s})(3\times 10^{9}\ \text{m s}^{-1})}{1.12\times 10^{-13}\ \text{J}} = 1.77\times 10^{-11}$ m

y utilizando los datos del problema

$$\lambda' = \frac{h\,c}{E_i} + \frac{h}{m_e\,c}(1-\cos\theta) = \left((6.63\times 10^{-34}\ \text{J s})(3\times 10^{9}\ \text{m s}^{-1})\right)/(1.12\times 10^{-13}\ \text{J}) + (6.63\times 10^{-34}\ \text{J s})/\left((9.11\times 10^{-31}\ \text{kg})(3\times 10^{9}\ \text{m s}^{-1})\right)[1-\cos(35^{\circ})] = 2.65\times 10^{-12}\ \text{m}$$

La energía es

$$E_f = \frac{h\,c}{\lambda'} = \left((6.63\times 10^{-34}\ \text{J s})(3\times 10^{9}\ \text{m s}^{-1})\right)/(2.65\times 10^{-12}\ \text{m}) = 7.5\times 10^{-14}\ \text{J} = 0.47\ \text{MeV}$$

(b)

Por conservación de la energía, la energía del electrón es

$$K_e = E - E' = 0.70\ \text{MeV} - 0.47\ \text{MeV} = 0.23\ \text{Mev}$$

(c)

El ángulo del electrón de retroceso es $\phi = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\lambda'/\lambda - \cos\theta}\right)$, así que

$$\phi = \arctan\left[\frac{\sin(35)}{\frac{2.65\times10^{-12}\ \text{m}}{1.77\times10^{-11}\ \text{m}} - \cos(35)}\right] = 53.2 \text{ grados.}$$

Exercise 1.15
If the stopping potential of a metal when illuminated with a radiation of wavelength 150 nm is 7.5 V, calculate the stopping potential of the metal when illuminated by a radiation of wavelength 275 nm.

Solución:

La relación entre la energía de los fotones incidentes, la función de trabajo del metal W y el potencial de corte V_s es la expresión 1.23 (pag, 12 (29)) del Zettili,

$$V_s = \frac{h\,\nu}{e} - \frac{W}{e} = \frac{h\,c}{e\,\lambda} - \frac{W}{e}.$$

Por tanto, la función de trabajo del metal es

$$W = \frac{h\,c}{\lambda} - e\,V_s$$

que nos da

$$W = \frac{\left(6.63\times10^{-34}\ \text{J s}\right)\left(3\times10^{8}\ \text{m s}^{-1}\right)}{150\times10^{-9}\ \text{m}} - \left(1.6\times10^{-19}\ \text{C}\right)(7.5\ \text{V}) = 1.23\times10^{-19}\ \text{J} = 0.77\ \text{eV}$$

Por tanto, el potencial de corte a 275 nm será

$$V_s = \frac{h\,c}{e\,\lambda} - \frac{W}{e} = \left(\left(6.63\times10^{-34}\ \text{J s}\right)\left(3\times10^{8}\ \text{m s}^{-1}\right)\right)/\left(\left(275\times10^{-9}\ \text{m}\right)\left(1.6\times10^{-19}\ \text{C}\right)\right) - \frac{1.23\times10^{-19}\ \text{J}}{1.6\times10^{-19}\ \text{C}} = 3.75\ \text{V}$$

Exercise 1.22
X-rays of wavelength 0.0008 nm collide with electrons initially at rest. If the wavelength of the scattered photons is 0.0017 nm, determine
(a) the kinetic energy of the recoiling electrons,
(b) the angle at which the photons scatter, and
(c) the angle at which the electrons recoil.

Solución:

(a)

Por conservación de la energía, la energía cinética del electrón es $E_i - E_f = h\,c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$, es decir,

$$K_e = E_i - E_f = h\,c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = h\,c\left(\frac{1}{8\times10^{-13}\ \text{m}} - \frac{1}{17\times10^{-13}\ \text{m}}\right) = 1.31\times10^{-13}\ \text{J} = 0.82\ \text{MeV}$$

(b)

El ángulo de dispersión del fotón lo obtenemos despejando de la fórmula $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$; es decir,

$$\theta = \arccos\left[1 - \frac{m_e c}{h}(\lambda' - \lambda)\right] = 51 \text{ grados.}$$

(c)

El ángulo del electrón de retroceso es $\phi = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\lambda'/\lambda - \cos\theta}\right)$, así que

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\lambda'/\lambda - \cos\theta}\right) = 26.1 \text{ grados.}$$

Exercise 1.25

When scattering photons from electrons at rest, if the scattered photons are detected at 90° and if their wavelength is double that of the incident photons, find

(a) the wavelength of the incident photons,

(b) the energy of the recoiling electrons and the angle at which they recoil, and

(c) the energies of the incident and scattered photons.

Solución:

(a)

En el problema se nos dice que $\lambda' = 2\lambda$, y además sabemos que $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$, por lo tanto

$$\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} \quad \Longrightarrow \quad \lambda' = 4.86 \times 10^{-12} \text{ m}$$

De ahí que

$$E_i = \frac{h c}{\lambda} = 0.50 \text{ MeV}, \quad E_f = \frac{h c}{\lambda'} = \frac{h c}{2\lambda} = 0.25 \text{ MeV}$$

Y finalmente

$$K_e = E_i - E_f = 0.25 \text{ MeV}$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad \theta = \arccos\left[1 - \frac{m_e c}{h}(\lambda' - \lambda)\right] = \arccos\left(1 - \frac{2 m_e c \lambda}{h}\right)$$

Exercise 1.30

Consider a tenfold ionized sodium ion, Na^{10+}, which is obtained by removing ten electrons from an Na atom.

(a) Calculate the orbiting speed and orbital angular momentum of the electron (with respect to the ion's origin) when the ion is in its fourth excited state.

(b) Calculate the frequency of the radiation emitted when the ion deexcites from its fourth excited state to the first excited state.