# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial, 1*

Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de “está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento”.
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Una distribución de carga eléctrica tiene una densidad volumétrica esféricamente simétrica dada como $\rho(r) = a / r$, siendo $a$ una constante. Determina el campo eléctrico, como vector, en todos los puntos del espacio

Solución:

Dada la simetría esférica del problema es claro que el campo eléctrico será radial (en coordenadas esféricas) y sólo dependerá de la distancia al origen, el cual hacemos coincidir con el centro de la distribución de carga.

Construimos como “superficie gaussiana” una esfera cuyo centro es el origen y que tiene radio $r > 0$ arbitrario. Por la simetría del problema, el campo es constante sobre dicha superficie gaussiana y es paralelo a su normal en todos los puntos, asi que el flujo de campo eléctrico será

$$\Phi_E = \oint_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E \oint_{\text{esfera}} dS = E \times 4\,\pi\,r^2$$

La carga neta encerrada por esa “esfera gaussiana” es

$$Q = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r} r'^2\, dr'\, \frac{a}{r'} =$$

$$2\,\pi\,a \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r} r'\, dr' = 4\,\pi\,a \int_0^{r} r'\, dr' = 4\,\pi\,a \left(\frac{r^2}{2}\right) = 2\,\pi\,a\,r^2$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\, Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$E \times 4\,\pi\,r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\, 2\,\pi\,a\,r^2$$

y, por tanto,

$$E = \frac{a}{2\,\varepsilon_0}$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{a}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas esféricas.

2. Un condensador de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de 15 $\mu$F y se conecta a una batería de 50 V; posteriormente se quita la batería. Si el aire es reemplazado por un aceite que tiene $\kappa = 2.2$, encuentra el nuevo valor de la capacitancia y de la diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

(a) La capacitancia es $C = \frac{q}{\varphi}$, así que $q = \varphi\, C = (50\text{ V})\left(15 \times 10^{-6}\text{ F}\right) = 750\,\mu\text{C}$.

(b) Al meter el aceite la capacitancia crece a $C_f = \kappa\, C$. Así que la nueva capcitancia es 33 $\mu$F.

Por lo tanto, la nueva diferencia de potencial es $\varphi_f = \frac{q}{C_f} = \frac{\varphi\, C}{\kappa\, C} = \frac{\varphi}{\kappa} = \frac{50\text{ V}}{2.2} = 22.7$ V.

3. Un cascarón esférico con radio interior $a$ y radio exterior $b$ es construido con un material cuya resistividad es $\eta$. El cascarón tiene una corriente radial, con densidad uniforme en todas las direcciones. Muestra que su resistencia es $R = \frac{\eta}{4\,\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Solución:

La densidad de corriente es $\vec{J} = \frac{1}{\eta}\,\vec{E}$. El campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$. Por lo tanto, $\vec{J} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0\,\eta}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$. La corriente que pasa a traves de cualquier esfera concentrica sera $I = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0\,\eta}\,\frac{q}{r^2}\,4\,\pi\,r^2 = \frac{q}{\epsilon_0\,\eta}$.

En el curso vimos que la diferencia de potencial entre las dos esferas es $\Delta\varphi = \frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Por tanto,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\frac{q}{\epsilon_0\,\eta}} = \frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{\epsilon_0\,\eta}{q} = \frac{\eta}{4\,\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

4. Dos electrones están fijos a una distancia de 2.0 cm uno del otro. Un tercer electrón es disparado desde el infinito y se detiene exactamente en la mitad entre los dos electrones originales, ¿cuál es la velocidad inicial del electrón?

Solución:

Este problema se resuelve considerando la energía del sistema.

La energía originalmente almacenada en el sistema formado por los dos electrones es

$$U_i = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r_{12}}.$$

Cuando ya el trercer electrón se colocó entre los otros dos, la energía añadida es

$$\Delta U = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r_{13}} + \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r_{23}}.$$

Esta última energía la debería tener el electrón cuando fue disparado, así que

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right),$$

y despejando

$$v = e\,\sqrt{\frac{1}{2\,\pi\varepsilon_0\,m}\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right)}\,.$$

Utilizando los valores proporcionados en el problema,

$$v = 1.602\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\,\pi\left(8.85\times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J\,m}}\right)\left(9.1\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)}\left(\frac{1}{1\times 10^{-2}\,\mathrm{m}} + \frac{1}{1\times 10^{-2}\,\mathrm{m}}\right)\right)} = 318.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

La velocidad con la que el electrón debe ser disparado es de 0.3185 km/s.

5. Se tiene el potencial eléctrico descrito en coordenadas cilíndricas como $\varphi = a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho\cos\theta$ para $\rho \le R$ y $\varphi = \frac{a\,R^3}{\rho}\cos\theta$ para $\rho \ge R$, siendo $a$ y $R$ constantes. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica que produce este campo eléctrico.

Solución:

La ecuación de Poisson establece que $\nabla^2\varphi = -\rho\,/\,\varepsilon_0$, así que $\rho = -\varepsilon_0\,\nabla^2\varphi$.

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

así que para $\rho \le R$,

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho\cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\,a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[3\,R\,\rho - 2\,\rho^2\right]\right) - \varepsilon_0\,\frac{a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2}$$

$$= -\varepsilon_0\, a\cos\theta\, \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho}\left(3\,R\,\rho - 4\,\rho^2\right) + \varepsilon_0\, \frac{a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho}{\rho^2}\, \cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\, a\cos\theta\, \frac{1}{\rho}\,(3\,R - 8\,\rho) + \varepsilon_0\, \frac{a(3\,R - 2\,\rho)}{\rho}\, \cos\theta$$

$$= -\varepsilon_0\, a\cos\theta\, \frac{1}{\rho}\,(3\,R - 8\,\rho - 3\,R + 2\,\rho) = 6\,\varepsilon_0\, a\cos\theta.$$

Para $r > R$,

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\, \frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\, \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \frac{a\,R^3}{\rho}\, \cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\left[aR^3\cos\theta\, \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\, \frac{\partial}{\partial\rho}\, \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a\,R^3}{\rho}\, \frac{1}{\rho^2}\, \frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2}\right]$$

$$= -\varepsilon_0\left[-aR^3\cos\theta\, \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\, \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{a\,R^3}{\rho}\, \frac{\cos\theta}{\rho^2}\right] =$$

$$-\varepsilon_0\, aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^3}\right] = \varepsilon_0\, aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho^3}\right] = 0.$$

Resumiendo,

$$\rho(r,\, \theta) = \begin{cases} 6\,\varepsilon_0\, a\cos\theta & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Otra solución:

Primeramente debemos determinar el campo eléctrico. Si conocemos el potencial electrostático, tenemos que $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$\nabla = \hat{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\theta}\, \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{z}\, \frac{\partial}{\partial z}$$

asi que

$$\vec{E} = a(-3\,R + 4\,\rho)\cos\theta\,\hat{\rho} + a(3\,R - 2\,\rho)\sin\theta\ \hat{\theta} \quad \text{para } r < R,$$

y

$$\vec{E} = \frac{a\,R^3}{\rho^2}\left(\cos\theta\,\hat{\rho} + \sin\theta\ \hat{\theta}\right) \quad \text{para } r > R.$$

Para calcular la densidad volumétrica de carga eléctrica, usamos ahora la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Evaluamos la divergencia en coordenadas cilíndricas del campo eléctrico que encontramos arriba

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial(\rho\, E_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

obteniendo

$$\nabla \cdot \vec{E} = 6\, a \cos\theta \quad \text{para } r < R,$$

y

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{para } r > R.$$

Así que finalmente, la densidad volumétrica de carga es

$$\rho = 6\, \varepsilon_0\, a \cos\theta \quad \text{para } r < R,$$

y

$$\rho = 0 \quad \text{para } r > R.$$

# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial, 2*

Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Un condensador de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de 50 $\mu$F y se conecta a una batería de 150 V; posteriormente se quita la batería. Si el aire es reemplazado por un aceite que tiene $\kappa = 3.2$, encuentra el nuevo valor de la capacitancia y de la diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

(a) La capacitancia es $C = \frac{q}{\varphi}$, así que $q = \varphi\, C = (150\text{ V})\left(50 \times 10^{-6}\text{ F}\right) = 7.50\text{ mC}$.

(b) Al meter el aceite la capacitancia crece a $C_f = \kappa\, C$. Así que la nueva capcitancia es 0.16 mF.

Por lo tanto, la nueva diferencia de potencial es $\varphi_f = \frac{q}{C_f} = \frac{\varphi\, C}{\kappa\, C} = \frac{\varphi}{\kappa} = \frac{150\text{ V}}{3.2} = 46.9\text{ V}$.

2. Un cascarón esférico con radio interior $a$ y radio exterior $b$ es construido con un material cuya resistividad es $\eta$. El cascarón tiene una corriente radial, con densidad uniforme en todas las direcciones. Muestra que su resistencia es $R = \frac{\eta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Solución:

La densidad de corriente es $\vec{J} = \frac{1}{\eta}\vec{E}$. El campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$. Por lo tanto, $\vec{J} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\,\eta}\frac{q}{r^2}\hat{r}$. La corriente que pasa a traves de cualquier esfera concentrica sera $I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\,\eta}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0\,\eta}$.

En el curso vimos que la diferencia de potencial entre las dos esferas es $\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Por tanto,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\frac{q}{\epsilon_0\,\eta}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{\epsilon_0\,\eta}{q} = \frac{\eta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

3. Se tiene el potencial eléctrico descrito en coordenadas cilíndricas como $\varphi = a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho\cos\theta$ para $\rho \le R$ y $\varphi = \dfrac{a\,R^3}{\rho}\cos\theta$ para $\rho \ge R$, siendo $a$ y $R$ constantes. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica que produce este campo eléctrico.

Solución:

La ecuación de Poisson establece que $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$, así que $\rho = -\varepsilon_0\,\nabla^2\varphi$.

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

así que para $\rho \le R$,

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho\cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\,a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[3\,R\,\rho - 2\,\rho^2\right]\right) - \varepsilon_0\,\frac{a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2}$$

$$= -\varepsilon_0\,a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(3\,R\,\rho - 4\,\rho^2\right) + \varepsilon_0\,\frac{a(3\,R - 2\,\rho)\,\rho}{\rho^2}\cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\,a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\,(3\,R - 8\,\rho) + \varepsilon_0\,\frac{a(3\,R - 2\,\rho)}{\rho}\cos\theta$$

$$= -\varepsilon_0\,a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\,(3\,R - 8\,\rho - 3\,R + 2\,\rho) = 6\,\varepsilon_0\,a\cos\theta.$$

Para $r > R$,

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{a\,R^3}{\rho}\cos\theta =$$

$$-\varepsilon_0\left[aR^3\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a\,R^3}{\rho}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2}\right]$$

$$= -\varepsilon_0\left[-aR^3\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{a\,R^3}{\rho}\,\frac{\cos\theta}{\rho^2}\right] =$$

$$-\varepsilon_0\,aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^3}\right] = \varepsilon_0\,aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho^3}\right] = 0.$$

Resumiendo,

$$\rho(r,\,\theta) = \begin{cases} 6\,\varepsilon_0\,a\cos\theta & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Otra solución:

Primeramente debemos determinar el campo eléctrico. Si conocemos el potencial electrostático, tenemos que $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$\nabla = \hat{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\theta}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

asi que

$$\vec{E} = a(-3\,R + 4\,\rho)\cos\theta\,\hat{\rho} + a(3\,R - 2\,\rho)\sin\theta\;\hat{\theta} \;\;\text{para } r < R,$$

y

$$\vec{E} = \frac{a\,R^3}{\rho^2}\left(\cos\theta\,\hat{\rho} + \sin\theta\;\hat{\theta}\right) \;\;\text{para } r > R.$$

Para calcular la densidad volumétrica de carga eléctrica, usamos ahora la ecuación de Maxwell $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Evaluamos la divergencia en coordenadas cilíndricas del campo eléctrico que encontramos arriba

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\,E_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

obteniendo

$$\nabla\cdot\vec{E} = 6\,a\cos\theta \;\;\text{para } r < R,$$

y

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \;\;\text{para } r > R.$$

Así que finalmente, la densidad volumétrica de carga es

$$\rho = 6\,\varepsilon_0\,a\cos\theta \;\;\text{para } r < R,$$

y

$$\rho = 0 \;\;\text{para } r > R.$$

4. Una distribución de carga eléctrica tiene una densidad volumétrica esféricamente simétrica dada como $\rho(r) = a/r$, siendo $a$ una constante. Determina el campo eléctrico, como vector, en todos los puntos del espacio

Solución:

Dada la simetría esférica del problema es claro que el campo eléctrico será radial (en coordenadas esféricas) y sólo dependerá de la distancia al origen, el cual hacemos coincidir con el centro de la distribución de carga.

Construimos como “superficie gaussiana” una esfera cuyo centro es el origen y que tiene radio $r > 0$ arbitrario. Por la simetría del problema, el campo es constante sobre dicha superficie gaussiana y es paralelo a su normal en todos los puntos, asi que el flujo de campo eléctrico será

$$\Phi_E = \oint_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E \oint_{\text{esfera}} dS = E \times 4\,\pi\, r^2$$

La carga neta encerrada por esa "esfera gaussiana" es

$$Q = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r} r'^2\, dr'\, \frac{a}{r'} =$$

$$2\,\pi\, a \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r} r'\, dr' = 4\,\pi\, a \int_0^{r} r'\, dr' = 4\,\pi\, a \left(\frac{r^2}{2}\right) = 2\,\pi\, a\, r^2$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$E \times 4\,\pi\, r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\, 2\,\pi\, a\, r^2$$

y, por tanto,

$$E = \frac{a}{2\,\varepsilon_0}$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{a}{2\,\varepsilon_0}\, \hat{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas esféricas.

5. Dos electrones están fijos a una distancia de 10.0 cm uno del otro. Un tercer electrón es disparado desde el infinito y se detiene exactamente en la mitad entre los dos electrones originales, ¿cuál es la velocidad inicial del electrón?

Solución:

Este problema se resuelve considerando la energía del sistema.

La energía originalmente almacenada en el sistema formado por los dos electrones es

$$U_i = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\, \frac{e^2}{r_{12}}.$$

Cuando ya el trercer electrón se colocó entre los otros dos, la energía añadida es

$$\Delta U = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\, \frac{e^2}{r_{13}} + \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\, \frac{e^2}{r_{23}}.$$

Esta última energía la debería tener el electrón cuando fue disparado, así que

$$\frac{m\, v^2}{2} = \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right),$$

y despejando

$$v = e \sqrt{\frac{1}{2\,\pi\varepsilon_0\, m}\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right)}\,.$$

Utilizando los valores proporcionados en el problema,

$$v = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\,\pi\left(8.85 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J\,m}}\right)\left(9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)}\left(\frac{1}{5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} + \frac{1}{5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}\right)\right)} = 142.3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

La velocidad con la que el electrón debe ser disparado es de 0.142 km/s.

# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial,3*

Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Un cilindro infinitamente largo de radio $R$ tiene una densidad volumétrica de carga eléctrica que varía con el radio como $\rho(r) = \rho_0 \left(a - \frac{r}{b}\right)$, siendo $\rho_0$, $a$ y $b$ constantes positivas y $r$ la distancia medida a partir del eje del cilindro. Usa la simetría del problema y la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico, como vector, en todos los puntos del espacio.

Solución:

Dada la simetría axial y translacional del problema es claro que el campo eléctrico será radial (en coordenadas cilíndricas) y sólo dependerá de la distancia al eje del cilindro.

Debemos distinguir dos casos, el primero cuando calculamos el campo fuera del cilindro y el segundo cuando lo calculamos dentro.

a) Puntos fuera del cilindro, $r > R$.

Construimos como "superficie gaussiana" un cilindro cuyo eje coincide con el cilindro real, que tiene radio $r > R$ y altura $h$ totalmente arbitraria. Por la simetría del problema, el flujo de campo eléctrico a través de la cara inferior y superior del cilindro gaussiano es cero; de hecho, el campo eléctrico y la normal a dichas dos superficies son ortogonales. Debido a la simetría que ya expusimos arriba, el campo eléctrico es constante sobre la cara curva del cilindro, y el flujo a través de la cara lateral del cilindro será entonces $\Phi_{\text{cara lateral}} = 2\,\pi\,r\,h\,E$, siendo $E$ el valor del campo eléctrico sobre la cara del cilindro gaussiano.

La carga neta encerrada por ese "cilindro gaussiano" es

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r'\,dr'\,\rho_0 \left(a - \frac{r'}{b}\right) =$$

$$2\,\pi\,\rho_0\,h \int_0^R \left(a - \frac{r'}{b}\right) r'\,dr' = 2\,\pi\,\rho_0\,h \left(\frac{a\,R^2}{2} - \frac{R^3}{3\,b}\right) = 2\,\pi\,\rho_0\,h\,R^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3\,b}\right)$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$2\,\pi\,r\,h\,E = \frac{2\,\pi\,\rho_0\,h\,R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3\,b}\right)$$

y, por tanto,

$$E = \frac{\rho_0\,R^2}{2\,\varepsilon_0\,r}\left(a - \frac{2\,R}{3\,b}\right).$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0\,R^2}{2\,\varepsilon_0}\left(a - \frac{2\,R}{3\,b}\right)\frac{\hat{r}}{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas cilíndricas.

b) Puntos dentro del cilindro, $r < R$.

Para este caso todo funciona igual, excepto en lo que respecta a la carga encerrada dentro de la "superficie gaussiana". En este caso la carga enta encerrada es

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r'\,dr'\,\rho_0\left(a - \frac{r'}{b}\right) =$$

$$2\,\pi\,\rho_0\,h\int_0^r\left(a - \frac{r'}{b}\right)r'\,dr' = 2\,\pi\,\rho_0\,h\left(\frac{a\,r^2}{2} - \frac{r^3}{3\,b}\right) = 2\,\pi\,\rho_0\,h\,r^2\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3\,b}\right).$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$2\,\pi\,r\,h\,E = \frac{2\,\pi\,\rho_0\,h\,r^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3\,b}\right)$$

y, por tanto,

$$E = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0}\,r\left(a - \frac{2\,r}{3\,b}\right).$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0}\left(a - \frac{2\,r}{3\,b}\right)r\,\hat{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas cilíndricas.

2. Cuando una diferencia de potencial de 150 V es aplicada a las placas de un capacitor de placas paralelas, las placas tienen una densidad superificial de carga homógenea de 30.0 $\mathrm{nC}/\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es la distancia entre las placas de este condensador?

Solución:

La capacitancia está definida como $C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\sigma A}{\varphi}$.

Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia dada por $C = \epsilon_0 \frac{A}{l}$.

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos $\frac{\sigma A}{\varphi} = \epsilon_0 \frac{A}{l}$. Despejando $l$, $l = \frac{\epsilon_0 \varphi}{\sigma}$.

Usando lo datos proporcionados en el problema

$$l = \frac{\epsilon_0 \varphi}{\sigma} = \frac{\left(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)(150\ \mathrm{V})}{30.0\ \mathrm{nC}\big/\mathrm{cm}^2} = 4.43\ \mu\mathrm{m}$$

3. El oro es el más ductil de los metales. Por ejemplo, un gramo de oro puede ser moldeado en un alambre de 2.40 km de longitud. La densidad del oro es de $19.3 \times 10^3\ \mathrm{kg}\big/\mathrm{m}^3$ y su resistividad es de $2.44 \times 10^{-8}\ \Omega$ m. ¿Cuál es la resistencia de dicho alambre?

Solución:

La resistencia de un alambre de sección tranversal $A$, longitud $l$ y resistividad $\eta$, es $R = \eta \frac{l}{A}$. Conocemos $\eta = 2.44 \times 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$, conocemos $l = 2.40\ \mathrm{km}$, pero no conocemos $A$. Sin embargo, es fácil calcular $A$; tenemos 1 gramo de oro (que denotaremos como $m$), y como conocemos la densidad del oro, podemos calcular el volumen de dicho gramo: $v = \frac{m}{\beta}$, donde $\beta = 19.3 \times 10^3\ \mathrm{kg}\big/\mathrm{m}^3$ es la densidad de masa del oro. El volumen del alambre es $\chi = A\, l$, o $A = \frac{\chi}{l}$; tenemos entonces que $A = \frac{m}{l \beta}$.

Sustituyendo este último resultado en $R = \eta \frac{l}{A}$, tenemos $R = \eta \frac{l^2 \beta}{m}$. Usando los valores,

$R = \frac{\left(2.44 \times 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}\right)\left(2.40 \times 10^3\ \mathrm{m}\right)^2 \left(19.3 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3\right)}{10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 2.71 \times 10^6\ \Omega$.

La resistencia del alambre es 2.71 MΩ.

4. Tres cargas de +122 mC cada una están colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero de 1.72 m de lado. Si se abastece energía a razón de 831 W, ¿cuántos días se necesitarían para mover a una de las cargas al punto medio de la línea que une a las otras dos?

Solución:

La energía de un sistema de tres cargas es

$$W_T = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

En este caso las tres cargas son iguales, digamos a $q$, y la energía del sistema de tres cargas será

$$W_T = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} \right)$$

En la configuración inicial las distancias entre las cargas son iguales, llamemos a esa distancia $d$.

Entonces originalmente la energía del sistema es

$$W_T = \frac{3\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0}$$

En la configuración final tenemos $\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = d/2,\ \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right| = d,\ \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right| = d/2$, así que tenemos

$$W_T = \frac{q^2}{4\,\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{d} + \frac{1}{d} + \frac{2}{d}\right) = \frac{5\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0}$$

Así que el cambio de energía es

$$\Delta W_T = \frac{5\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0} - \frac{3\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0} = \frac{q^2}{2\,d\,\pi\epsilon_0};$$

es decir, la energía aumento en la cantidad $\Delta W_T = \frac{q^2}{2\,d\,\pi\epsilon_0}$.

Si la potencia suministrada es $P$, entonces el tiempo necesario para mover la carga será de

$$t = \frac{\Delta W_T}{P} = \frac{q^2}{2\,P\,d\,\pi\epsilon_0}.$$

Utilizando los datos provistos en el enunciado del problema, tenemos

$$t = \frac{\left(122\times 10^{-3}\ \mathrm{C}\right)^2}{2\,\pi\,(831\ \mathrm{W})\,(1.72\ \mathrm{m})\left(8.85\times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}\right)} = 187\,269\ \mathrm{s}$$

Como un día tiene $60\times 60\times 24 = 86\,400$ segundos, el tiempo en días será de

$$t = \frac{187\,269}{86\,400} = 2.17\ \text{días}$$

5. El potencial electrostático esféricamente simétrico de un átomo de hidrógeno está dado por $\varphi(r) = \frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1 + \frac{\alpha\,r}{2}\right)$ donde $\alpha$ y $A$ son constantes positivas. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica requerida para producir este potencial. Excluye el origen de tus cálculos.

Solución:

De la ecuación de Poisson sabemos que $\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\varphi$.

El laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Así que

$$\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\varphi = -\epsilon_0\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}.$$

Como $\varphi$ no depende de $\theta$ ni de $\phi$,

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right).$$

Ahora tomamos en cuenta que $\varphi(r) = \frac{A \exp(-\alpha\, r)}{r} \left(1 + \frac{\alpha\, r}{2}\right)$, para obtener

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\left[\frac{A \exp(-\alpha\, r)}{r} \left(1 + \frac{\alpha\, r}{2}\right)\right]\right\} = -\frac{1}{2} \epsilon_0\, \alpha^3\, A \exp(-\alpha\, r)$$

La distribución de carga eléctrica que produce el potencial $\varphi(r) = \frac{A \exp(-\alpha\, r)}{r} \left(1 + \frac{\alpha\, r}{2}\right)$ es $\rho(r) = -\frac{1}{2} \epsilon_0\, \alpha^3\, A \exp(-\alpha\, r)$ .

# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial,4*

Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de “está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento”.
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. El oro es el más ductil de los metales. Por ejemplo, un gramo de oro puede ser moldeado en un alambre de 4.20 km de longitud. La densidad del oro es de $19.3\times 10^3\ \mathrm{kg}\big/\mathrm{m}^3$ y su resistividad es de $2.44\times 10^{-8}\ \Omega$ m. ¿Cuál es la resistencia de dicho alambre?

Solución:

La resistencia de un alambre de sección tranversal $A$, longitud $l$ y resistividad $\eta$, es $R=\eta\,\frac{l}{A}$. Conocemos $\eta=2.44\times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$, conocemos $l=4.20\,\mathrm{km}$, pero no conocemos $A$. Sin embargo, es fácil calcular $A$; tenemos 1 gramo de oro (que denotaremos como $m$), y como conocemos la densidad del oro, podemos calcular el volumen de dicho gramo: $v=\frac{m}{\beta}$, donde $\beta=19.3\times 10^3\ \mathrm{kg}\big/\mathrm{m}^3$ es la densidad de masa del oro. El volumen del alambre es $\chi=A\,l$, o $A=\frac{\chi}{l}$; tenemos entonces que $A=\frac{m}{l\beta}$.

Sustituyendo este último resultado en $R=\eta\,\frac{l}{A}$, tenemos $R=\eta\,\frac{l^2\beta}{m}$. Usando los valores,

$R=\frac{\left(2.44\times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}\right)\left(4.20\times 10^3\,\mathrm{m}\right)^2\left(19.3\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)}{10^{-3}\,\mathrm{kg}}=8.31\times 10^6\,\Omega.$

La resistencia del alambre es 8.31 MΩ.

2. Tres cargas de +20 mC cada una están colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero de 2.2 m de lado. Si se abastece energía a razón de 950 W, ¿cuántos días se necesitarían para mover a una de las cargas al punto medio de la línea que une a las otras dos?

Solución:

La energía de un sistema de tres cargas es

$$W_T=\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1\,q_2}{r_{12}}+\frac{q_1\,q_3}{r_{13}}+\frac{q_2\,q_3}{r_{23}}\right)$$

En este caso las tres cargas son iguales, digamos a $q$, y la energía del sistema de tres cargas será

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}\right)$$

En la configuración inicial las distancias entre las cargas son iguales, llamemos a esa distancia $d$. Entonces originalmente la energía del sistema es

$$W_T = \frac{3\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0}$$

En la configuración final tenemos $\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = d/2,\ \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right| = d,\ \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right| = d/2$, así que tenemos

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{d} + \frac{1}{d} + \frac{2}{d}\right) = \frac{5\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0}$$

Así que el cambio de energía es

$$\Delta W_T = \frac{5\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0} - \frac{3\,q^2}{4\,d\,\pi\epsilon_0} = \frac{q^2}{2\,d\,\pi\epsilon_0};$$

es decir, la energía aumento en la cantidad $\Delta W_T = \frac{q^2}{2\,d\,\pi\epsilon_0}$.

Si la potencia suministrada es $P$, entonces el tiempo necesario para mover la carga será de

$$t = \frac{\Delta W_T}{P} = \frac{q^2}{2\,P\,d\,\pi\epsilon_0}.$$

Utilizando los datos provistos en el enunciado del problema, tenemos

$$t = \frac{\left(20\times10^{-3}\ \text{C}\right)^2}{2\,\pi\,(950\ \text{W})\,(2.2\ \text{m})\left(8.85\times10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}\right)} = 3440.21\ \text{s}$$

Como un día tiene $60\times60\times24 = 86\,400$ segundos, el tiempo en días será de

$$t = \frac{3440.21}{86\,400} = 0.04\ \text{días} = 57.6\ \text{minutos}$$

3. Cuando una diferencia de potencial de 80 V es aplicada a las placas de un capacitor de placas paralelas, las placas tienen una densidad superificial de carga homógenea de 40.0 nC$/$cm$^2$. ¿Cuál es la distancia entre las placas de este condensador?

Solución:

La capacitancia está definida como $C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\sigma A}{\varphi}$.

Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia dada por $C = \epsilon_0\,\frac{A}{l}$.

Igualando las dos expresiones anteriores, tenemos $\frac{\sigma A}{\varphi} = \epsilon_0\,\frac{A}{l}$. Despejando $l$, $l = \frac{\epsilon_0\,\varphi}{\sigma}$.

Usando lo datos proporcionados en el problema

$$l = \frac{\epsilon_0\,\varphi}{\sigma} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)(80\ \mathrm{V})}{40.0\ \mathrm{nC}\big/\mathrm{cm}^2} = 1.77\,\mu\mathrm{m}$$

4. El potencial electrostático esféricamente simétrico de un átomo de hidrógeno está dado por $\varphi(r) = \frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1+\frac{\alpha\,r}{2}\right)$ donde $\alpha$ y $A$ son constantes positivas. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica requerida para producir este potencial. Excluye el origen de tus cálculos.

$$\varphi(r) = \frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1+\frac{\alpha\,r}{2}\right)$$

donde $\alpha$ y $A$ son constantes positivas. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica requerida para producir este potencial. Excluye el origen de tus cálculos.

Solución:

De la ecuación de Poisson sabemos que $\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\varphi$.

El laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Así que

$$\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\varphi = -\epsilon_0\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}.$$

Como $\varphi$ no depende de $\theta$ ni de $\phi$,

$$\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\varphi = -\epsilon_0\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).$$

Ahora tomamos en cuenta que $\varphi(r) = \frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1+\frac{\alpha\,r}{2}\right)$, para obtener

$$\rho = -\epsilon_0\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left[\frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1+\frac{\alpha\,r}{2}\right)\right]\right\} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_0\,\alpha^3\,A\exp(-\alpha\,r)$$

La distribución de carga eléctrica que produce el potencial $\varphi(r) = \frac{A\exp(-\alpha\,r)}{r}\left(1+\frac{\alpha\,r}{2}\right)$ es $\rho(r) = -\frac{1}{2}\,\epsilon_0\,\alpha^3\,A\exp(-\alpha\,r)$ .

5. Un cilindro infinitamente largo de radio $R$ tiene una densidad volumétrica de carga eléctrica que varía con el radio como $\rho(r) = \rho_0\left(a-\frac{r}{b}\right)$, siendo $\rho_0$, $a$ y $b$ constantes positivas y $r$ la distancia medida a partir del eje del cilindro. Usa la simetría del problema y la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico, como vector, en todos los puntos del espacio.

Solución:

Dada la simetría axial y translacional del problema es claro que el campo eléctrico será radial (en coordenadas cilíndricas) y sólo dependerá de la distancia al eje del cilindro.

Debemos distinguir dos casos, el primero cuando calculamos el campo fuera del cilindro y el segundo cuando lo calculamos dentro.

a) Puntos fuera del cilindro, $r > R$.

Construimos como "superficie gaussiana" un cilindro cuyo eje coincide con el cilindro real, que tiene radio $r > R$ y altura $h$ totalmente arbitraria. Por la simetría del problema, el flujo de campo eléctrico a través de la cara inferior y superior del cilindro gaussiano es cero; de hecho, el campo eléctrico y la normal a dichas dos superficies son ortogonales. Debido a la simetría que ya expusimos arriba, el campo eléctrico es constante sobre la cara curva del cilindro, y el flujo a través de la cara lateral del cilindro será entonces $\Phi_{\text{cara lateral}} = 2\pi r h E$, siendo $E$ el valor del campo eléctrico sobre la cara del cilindro gaussiano.

La carga neta encerrada por ese "cilindro gaussiano" es

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r'\, dr'\, \rho_0 \left(a - \frac{r'}{b}\right) =$$

$$2\pi\rho_0 h \int_0^R \left(a - \frac{r'}{b}\right) r'\, dr' = 2\pi\rho_0 h \left(\frac{a R^2}{2} - \frac{R^3}{3 b}\right) = 2\pi\rho_0 h R^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3 b}\right)$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$2\pi r h E = \frac{2\pi\rho_0 h R^2}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3 b}\right)$$

y, por tanto,

$$E = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r} \left(a - \frac{2 R}{3 b}\right).$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \left(a - \frac{2 R}{3 b}\right) \frac{\hat{r}}{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas cilíndricas.

b) Puntos dentro del cilindro, $r < R$.

Para este caso todo funciona igual, excepto en lo que respecta a la carga encerrada dentro de la "superficie gaussiana". En este caso la carga enta encerrada es

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r'\, dr'\, \rho_0 \left(a - \frac{r'}{b}\right) =$$

$$2\,\pi\,\rho_0\,h\int_0^r\left(a-\frac{r'}{b}\right)r'\,dr' = 2\,\pi\,\rho_0\,h\left(\frac{a\,r^2}{2}-\frac{r^3}{3\,b}\right) = 2\,\pi\,\rho_0\,h\,r^2\left(\frac{a}{2}-\frac{r}{3\,b}\right).$$

Usando la ley de Gauss $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q_{\text{encerrada}}$, tenemos

$$2\,\pi\,r\,h\,E = \frac{2\,\pi\,\rho_0\,h\,r^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2}-\frac{r}{3\,b}\right)$$

y, por tanto,

$$E = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0}\,r\left(a-\frac{2\,r}{3\,b}\right).$$

Añadiendo las características vectoriales, llegamos al resultado final,

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0}\left(a-\frac{2\,r}{3\,b}\right)r\,\hat{r},$$

siendo $\hat{r}$ el vector radial unitario de las coordenadas cilíndricas.

# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial, 5*

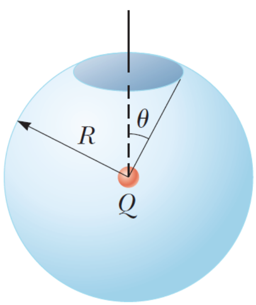
Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Una esfera de radio $R$ tiene una carga puntual $Q$ en su centro, tal y como se muestra en la figura




. Encuentra el flujo de campo eléctrico a través del gorro circular de medio ángulo $\theta$ que en la figura se muestra en azul más oscuro.

Solución:

Por la ley de Gauss, sabemos que el flujo de campo eléctrico a través de toda la esfera es $Q/\varepsilon_0$. Por la simetría del problema, sabemos también que el flujo es uniforme sobre toda la esfera. Así que para determinar el flujo a través de ese gorro circular basta sacar que fracción del ángulo sólido total de la esfera ($4\pi$) subtiende dicho gorro circular.

El ángulo sólido subtendido por el gorro circular está dado como

$$\Omega_{\text{gorro}} = \int_0^\theta d\psi \int_0^{2\pi} d\phi\, R \sin\psi = 2\pi R \int_0^\theta \sin\psi\, d\psi = 2\pi R\,(1-\cos\theta).$$

El ángulo sólido subtendido por la esfera completa es $4\pi$, así que la fracción es $f = \frac{2\pi R\,(1-\cos\theta)}{4\pi} = \frac{R\,(1-\cos\theta)}{2}$.

Por tanto, el flujo de campo eléctrico a través del gorro es $\Phi_E = f\,\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q\,R\,(1-\cos\theta)}{2\,\varepsilon_0}$.

2. Un capacitor es cargado con una diferencia de potencial $V$. Si se desea incrementar la energía almacenada en un 10%, ¿en cuánto se debe de aumentar el potencial $V$?

Solución:

La energía almacenada en un capacitor es $U = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2$.

Si aumentamos el potencial de $\varphi$ a $\varphi + \Delta\varphi$, la energía almacenada en el capacitor cambia a

$$U' = \frac{1}{2}\, C\, (\varphi + \Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 + C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2$$

El aumento de la energía almacenada será entonces

$$\Delta U = U' - U = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 + C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2 - \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 = C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2,$$

y su porcentaje de aumento, respecto a la energía almacenada incial, es

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2}{\frac{1}{2}\, C\, \varphi^2} = \frac{2\, \varphi\, \Delta\varphi + \Delta\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{2\, \varphi\, \Delta\varphi}{\varphi^2} + \frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{2\, \Delta\varphi}{\varphi} + \frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2},$$

que se reduce a

$$\frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2} + \frac{2\, \Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\Delta U}{U} = 0.$$

Esta ecuación de segundo orden se resuelve para $\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ como

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U}}\,,$$

donde hemos tomado el signo + porque el potencial aumentó.

Como queremos que $\frac{\Delta U}{U} = 0.1$, tenemos

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -1 + \sqrt{1 + 0.1} = 0.049$$

Si queremos que el incremento de la energía del capacitor sea del 10% deberemos aumentar el potencial en un 4.9%.

3. Si la magnitud de la velocidad de arrastre de los electrones libres en un alambre de cobre es de $7.84 \times 10^{-4}$ m/s, ¿cuál es el campo eléctrico en el conductor?

Solución:

Se tiene que la velocidad de arrastre es $J = n\, q\, v$. A su vez, $J = g\, E$, donde $g$ es la conductividad eléctrica. Igualando estas expresiones y despejando el campo $E = \frac{n\, q\, v}{g}$; escribimos ahora esta expresión usando la carga del electrón y la resistividad $\eta$ en lugar de la conductividad $g$, $E = n\, e\, v\, \eta$.

La resistividad del cobre se busca en una tabla o en Internet y es $\eta_{\mathrm{Cu}} = 1.7 \times 10^{-8}$ m $\Omega$. La carga del electrón es $1.602 \times 10^{-19}$ C. La velocidad de arrastre es uno de los datos del problema. Lo único que nos falta es calcular $n$, el número de portadores de carga por unidad de volumen.

Hemos hecho la hipótesis que cada átomo de cobre aporta un electrón a la banda de conducción; por lo tanto, habra tantos electrones por unidad de volumen como átomos de cobre. La densidad de masa del cobre es $\chi_{\text{Cu}} = 8960\,\text{kg}\big/\text{m}^3$. Además, sabemos que un mol de cobre, es decir, el peso molecular expresado en gramos, tiene un número de moléculas igual al número de Avogadro $N = 6.022 \times 10^{23}$ /mol. Como el peso atómico del cobre es 63.546, en 8960 kg hay $8.96 \times 10^6 \big/ 63.546 = 1.41 \times 10^5$ mol, y por tanto hay $\left(6.022 \times 10^{23}\right)\left(1.41 \times 10^5\right) = 8.49 \times 10^{28}$ átomos de cobre por metro cúbico. En resumen, $n = 8.49 \times 10^{28}$.

Así que finalmente,

$$E = n\,e\,v\,\eta = \left(8.49 \times 10^{28}\right)\left(1.602 \times 10^{-19}\,\text{C}\right)\left(7.84 \times 10^{-4}\,\text{m/s}\right)\left(1.7 \times 10^{-8}\,\text{m}\,\Omega\right) = 0.18\,\text{V/m}$$

El campo eléctrico en el conductor es de 0.18 V/m.

4. Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia de 4 $\mu$F cuando una hoja de mica de constante dieléctrica $\kappa = 5$ llena el espacio entre las placas. El capacitor es cargado con una batería que tiene una diferencia de potencial de 50 V, que después se desconecta. ¿Cuánto trabajo se tiene que hacer para sacar lentamente el dieléctrico del capacitor?

Solución:

Sea $C_i$ la capacitasncia inicial. Sabemos que la capacitancia final será $C_f = \kappa\, C_i$.

Ademas, $C_i = \frac{q}{\varphi_i}$ y $C_f = \frac{q}{\varphi_f}$; de estas dos ecuaciones encontramos que $C_i\,\varphi_i = C_f\,\varphi_f$, y como $C_f = \kappa\, C_i$, $C_i\,\varphi_i = \frac{C_i}{\kappa}\,\varphi_f$ de donde $\varphi_f = \kappa\,\varphi_i$.

La energía inicial del sistema es $W_i = \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2$. La energía final del sistema $W_f = \frac{1}{2}\,C_f\,\varphi_f^2$. Así que,

$$W_f - W_i = \frac{1}{2}\,C_f\,\varphi_f^2 - \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2 = \frac{1}{2}\,\frac{C_i}{\kappa}\,\kappa^2\,\varphi_i^2 - \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2 = \frac{1}{2}\,C_i\,\kappa\,\varphi_i^2 - \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2 = \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2(\kappa - 1).$$

Esa diferencia de energía es el trabajo que se hace para sacar la mica del condensador. Por lo tanto, el resultado es

$$\text{Energía} = \frac{1}{2}\,C_i\,\varphi_i^2(\kappa - 1) = \frac{1}{2}\,(4\,\mu\text{F})\,(50\,\text{V})^2\,(5 - 1) = 0.02\,\text{J}$$

5. Dada una región del espacio en la cual el campo electrostático está siempre en dirección paralela al eje X. Demuestra que en dicha región el campo eléctrico es independiente de $y$ y de $z$. Además, si no hay carga electrica en dicha región, prueba que también es independiente de $x$.

Solución:

Dado que el campo eléctrico es siempre en la dirección del eje X, será de la forma $\vec{E}(x,\,y,\,z) = (E_x(x,\,y,\,z),\,0,\,0)$, donde hemos escrito explícitamente una posible dependencia de las tres coordenadas.

Como se trata de un campo electrostático, necesariamente se cumple que $\nabla \times \vec{E} = 0$, o sea que $\nabla \times \vec{E} = (0, \partial_z E_x, \partial_y E_x) = 0$, que conduce a que $\partial_z E_x = 0$ y que $\partial_y E_x = 0$; es decir, $E_x$ no depende ni de $y$ ni de $z$, tal y como queríamos mostrar.

Si además no hay cargas, se satisface que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, o sea que, $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = 0$, y por tanto también será independiente de $x$.

$$\nabla \times \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

$$\nabla \times \vec{E} = (0, \partial_z E_x, \partial_y E_x) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = 0$$

# Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

*Curso propedéutico de teoría electromagnética. Segundo examen parcial, 6*

Viernes 3 de noviembre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Un capacitor es cargado con una diferencia de potencial $V$. Si se desea incrementar la energía almacenada en un 20%, ¿en cuánto se debe de aumentar el potencial $V$?

Solución:

La energía almacenada en un capacitor es $U = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2$.

Si aumentamos el potencial de $\varphi$ a $\varphi + \Delta\varphi$, la energía almacenada en el capacitor cambia a

$$U' = \frac{1}{2}\, C\, (\varphi + \Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 + C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2$$

El aumento de la energía almacenada será entonces

$$\Delta U = U' - U = \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 + C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2 - \frac{1}{2}\, C\, \varphi^2 = C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2,$$

y su porcentaje de aumento, respecto a la energía almacenada incial, es

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{C\, \varphi\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, C\, \Delta\varphi^2}{\frac{1}{2}\, C\, \varphi^2} = \frac{2\, \varphi\, \Delta\varphi + \Delta\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{2\, \varphi\, \Delta\varphi}{\varphi^2} + \frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{2\, \Delta\varphi}{\varphi} + \frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2},$$

que se reduce a

$$\frac{\Delta\varphi^2}{\varphi^2} + \frac{2\, \Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\Delta U}{U} = 0.$$

Esta ecuación de segundo orden se resuelve para $\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ como

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U}}\,,$$

donde hemos tomado el signo + porque el potencial aumentó.

Como queremos que $\frac{\Delta U}{U} = 0.2$, tenemos

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -1 + \sqrt{1 + 0.2} = 0.095$$

Si queremos que el incremento de la energía del capacitor sea del 20% deberemos aumentar el potencial en un 9.5%.

2. Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia de 8 $\mu$F cuando una hoja de mica de constante dieléctrica $\kappa = 4$ llena el espacio entre las placas. El capacitor es cargado con una batería que tiene una diferencia de potencial de 10 V, que después se desconecta. ¿Cuánto trabajo se tiene que hacer para sacar lentamente el dieléctrico del capacitor?

Solución:

Sea $C_i$ la capacitasncia inicial. Sabemos que la capacitancia final será $C_f = \kappa\, C_i$.

Ademas, $C_i = \frac{q}{\varphi_i}$ y $C_f = \frac{q}{\varphi_f}$; de estas dos ecuaciones encontramos que $C_i\, \varphi_i = C_f\, \varphi_f$, y como $C_f = \kappa\, C_i$, $C_i\, \varphi_i = \frac{C_i}{\kappa}\, \varphi_f$ de donde $\varphi_f = \kappa\, \varphi_i$.

La energía inicial del sistema es $W_i = \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2$. La energía final del sistema $W_f = \frac{1}{2}\, C_f\, \varphi_f^2$. Así que,

$$W_f - W_i = \frac{1}{2}\, C_f\, \varphi_f^2 - \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2 = \frac{1}{2}\, \frac{C_i}{\kappa}\, \kappa^2\, \varphi_i^2 - \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2 = \frac{1}{2}\, C_i\, \kappa\, \varphi_i^2 - \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2 = \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2 (\kappa - 1).$$

Esa diferencia de energía es el trabajo que se hace para sacar la mica del condensador. Por lo tanto, el resultado es

$$\text{Energía} = \frac{1}{2}\, C_i\, \varphi_i^2 (\kappa - 1) = \frac{1}{2}\, (8\, \mu\text{F})\, (10\ \text{V})^2\, (4 - 1) = 1.2\ \text{mJ}$$

3. Si la magnitud de la velocidad de arrastre de los electrones libres en un alambre de cobre es de $1.48 \times 10^{-4}$ m/s, ¿cuál es el campo eléctrico en el conductor?

Solución:

Se tiene que la velocidad de arrastre es $J = n\, q\, v$. A su vez, $J = g\, E$, donde $g$ es la conductividad eléctrica. Igualando estas expresiones y despejando el campo $E = \frac{n\, q\, v}{g}$; escribimos ahora esta expresión usando la carga del electrón y la resistividad $\eta$ en lugar de la conductividad $g$, $E = n\, e\, v\, \eta$.

La resistividad del cobre se busca en una tabla o en Internet y es $\eta_{\text{Cu}} = 1.7 \times 10^{-8}$ m $\Omega$. La carga del electrón es $1.602 \times 10^{-19}$ C. La velocidad de arrastre es uno de los datos del problema. Lo único que nos falta es calcular $n$, el número de portadores de carga por unidad de volumen.

Hemos hecho la hipótesis que cada átomo de cobre aporta un electrón a la banda de conducción; por lo tanto, habra tantos electrones por unidad de volumen como átomos de cobre. La densidad de masa del cobre es $\chi_{\text{Cu}} = 8960\ \text{kg} \big/ \text{m}^3$. Además, sabemos que un mol de cobre, es decir, el peso molecular expresado en gramos, tiene un número de moléculas igual al número de Avogadro $N = 6.022 \times 10^{23}$ /mol.

Como el peso atómico del cobre es 63.546, en 8960 kg hay $8.96 \times 10^6 / 63.546 = 1.41 \times 10^5$ mol, y por tanto hay $\left(6.022 \times 10^{23}\right)\left(1.41 \times 10^5\right) = 8.49 \times 10^{28}$ átomos de cobre por metro cúbico. En resumen, $n = 8.49 \times 10^{28}$.

Así que finalmente,

$$E = n\,e\,v\,\eta = \left(8.49 \times 10^{28}\right)\left(1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(1.48 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}\right)\left(1.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}\,\Omega\right) = 0.034\,\mathrm{V/m}$$

El campo eléctrico en el conductor es de 0.034 V/m.

4. Dada una región del espacio en la cual el campo electrostático está siempre en dirección paralela al eje X. Demuestra que en dicha región el campo eléctrico es independiente de $y$ y de $z$. Además, si no hay carga electrica en dicha región, prueba que también es independiente de $x$.

Solución:

Dado que el campo eléctrico es siempre en la dirección del eje X, será de la forma $\vec{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), 0, 0)$, donde hemos escrito explícitamente una posible dependencia de las tres coordenadas.

Como se trata de un campo electrostático, necesariamente se cumple que $\nabla \times \vec{E} = 0$, o sea que $\nabla \times \vec{E} = (0, \partial_z E_x, \partial_y E_x) = 0$, que conduce a que $\partial_z E_x = 0$ y que $\partial_y E_x = 0$; es decir, $E_x$ no depende ni de $y$ ni de $z$, tal y como queríamos mostrar.

Si además no hay cargas, se satisface que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, o sea que, $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = 0$, y por tanto también será independiente de $x$.

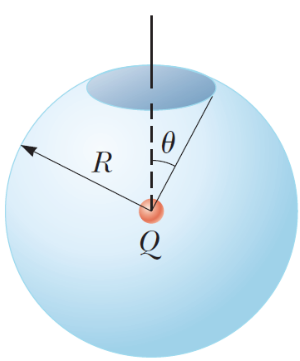
$$\nabla \times \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

$$\nabla \times \vec{E} = (0, \partial_z E_x, \partial_y E_x) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = 0$$

5. Una esfera de radio $R$ tiene una carga puntual $Q$ en su centro, tal y como se muestra en la figura




. Encuentra el flujo de campo eléctrico a través del gorro circular de medio ángulo $\theta$ que en la figura se muestra en azul más oscuro.

Solución:

Por la ley de Gauss, sabemos que el flujo de campo eléctrico a través de toda la esfera es $Q / \varepsilon_0$. Por la simetría del problema, sabemos también que el flujo es uniforme sobre toda la esfera. Así que para determinar el flujo a través de ese gorro circular basta sacar que fracción del ángulo sólido total de la esfera ($4\pi$) subtiende dicho gorro circular.

El ángulo sólido subtendido por el gorro circular está dado como

$$\Omega_{\text{gorro}} = \int_0^{\theta} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi \, R \sin\psi = 2\pi R \int_0^{\theta} \sin\psi \, d\psi = 2\pi R (1 - \cos\theta).$$

El ángulo sólido subtendido por la esfera completa es $4\pi$, así que la fracción es $f = \frac{2\pi R (1-\cos\theta)}{4\pi} = \frac{R(1-\cos\theta)}{2}$.

Por tanto, el flujo de campo eléctrico a través del gorro es $\Phi_E = f \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q R (1-\cos\theta)}{2 \varepsilon_0}$.