Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

Viernes 20 de octubre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Una barra aislante cargada tiene una longitud de 2.00 metros y una sección transversal de área 4.00 cm^2. ¿qué exceso de electrones tiene la barra si la densidad volumétrica de carga es uniforme con valor $\rho(\vec{r}) = -4.00\,\mu\text{C} \big/ \text{m}^3$?

Solución:

La carga total de la barra es $Q = \int_{\text{barra}} \rho(\vec{r})\, dV$. Como $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, una constante, tenemos

$$Q = \int_{\text{barra}} \rho(\vec{r})\, dV = \int_{\text{barra}} \rho_0\, dV = \rho_0 \int_{\text{barra}} dV = \rho_0 \times \text{Volumen de la barra.}$$

El volumen de la barra es el área de la base por la altura; es decir, $V = \left(4.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^2\right) \times (2.00\ \text{m}) = 8.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$.

Por lo tanto, la carga total de la barra es

$$Q = \left(-4.00 \times 10^{-6}\ \text{C} \big/ \text{m}^3\right) \times \left(8.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^3\right) = -3.20 \times 10^{-9}\ C.$$

Ahora, como la carga de cada electrón es $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C, el exceso de electrones es

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{-3.20 \times 10^{-9}\ \text{C}}{-1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 2.00 \times 10^{10}$$

Resumiendo: El número de electrones en exceso en la barra es de 2.00×10^{10}.

2. Una carga eléctrica puntual de magnitud $q_1 = +6.0\,\mu$C es colocada sobre el eje X con $x_1 = 8.0$ m. Una segunda carga eléctrica de magnitud $q_2 = -4.0\,\mu$C es colocada en $x_2 = 16$ m. Determina la carga que hay que colocar en $x = 24$ m de tal manera que cualquier carga colocada en el origen no experimente ninguna fuerza eléctrica?

Solución:

Denotemos como q_3 la carga hipotética que estaría en $x_3 =$ 24 m. Usando la ley de Coulomb y el principio de superposición, la fueza que sentiría una carga arbitraria Q en el origen sería

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,q_1}{x_1^2}\hat{\imath} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,q_2}{x_2^2}\hat{\imath} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,q_3}{x_3^2}\hat{\imath} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{x_1^2} + \frac{q_2}{x_2^2} + \frac{q_3}{x_3^2}\right)\hat{\imath}.$$

Como queremos que la fuerza que siente Q sea cero, debemos tener

$$\frac{q_1}{x_1^2} + \frac{q_2}{x_2^2} + \frac{q_3}{x_3^2} = 0,$$

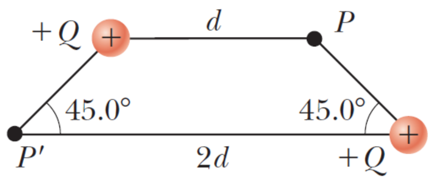
de donde encontramos el valor de nuestra incógnita q_3,

$$q_3 = -\left(\frac{q_1}{x_1^2} + \frac{q_2}{x_2^2}\right)x_3^2.$$

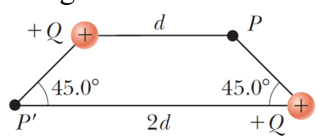
Usando los valores numéricos provistos en el problema, tenemos

$$q_3 = -\left[\frac{+6.0\times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{(8.0\,\mathrm{m})^2} + \frac{-4.0\times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{(16.0\,\mathrm{m})^2}\right](24.0\,\mathrm{m})^2 = -45.0\times 10^{-6}\,\mathrm{C} = -45.0\,\mu\mathrm{C}$$

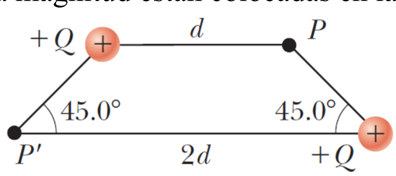
La carga que deberemos colocar en $x_3 = 24.0$ m es de $-45.0\,\mu$C.

3. Dos cargas positivas de la misma magnitud están colocadas en las esquinas opuestas de un trapezoide, tal y como se muestra en la figura adjunta 

. Encuentra el campo eléctrico en el punto P.

Dos cargas positivas de la misma magnitud están colocadas en las esquinas opuestas de un trapezoide, tal y como se muestra en la figura adjunta 

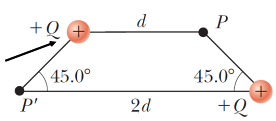
. Encuentra el campo eléctrico en el punto P.

Dos cargas positivas de la misma magnitud están colocadas en las esquinas opuestas de un trapezoide, tal y como se muestra en la figura adjunta 

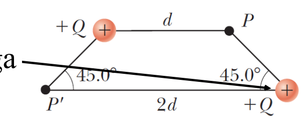
. Encuentra el campo eléctrico en el punto P' (atención es en el punto P' con una prima)

Solución:

(a)

El campo que esta carga 

produce en P es $\vec{E}_1(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}\,\hat{\imath}$

Para calcular el campo que produce esta carga 

primero debemos de calcular su distancia a P; llamemos x_1 a dicha distancia. Del dibujo es claro que $\cos\theta = \frac{d/2}{x_1}$, donde al ángulo le he llamado θ; así que $x_1 = \frac{d}{2\cos\theta}$. La magnitud del campo este será entonces $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{d}{2\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^2\theta}{d^2}$. Este campo tiene componente horizontal, que se obtiene multiplicando por el coseno de θ y una componente vertical que se obtiene multiplicando por el seno de θ. Finalmente el campo es $\vec{E}_2(\vec{P}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^3\theta}{d^2}\,\hat{\imath} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^2\theta\sin\theta}{d^2}\,\hat{\jmath}$.

Sumando ahora los dos campos,

$$E(\vec{P}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{d^2}\,\hat{\imath} - \frac{4\,Q\cos^3\theta}{d^2}\,\hat{\imath} + \frac{4\,Q\cos^2\theta\,\sin\theta}{d^2}\,\hat{\jmath}\right] = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-4\cos^3\theta\right)\hat{\imath} + 4\sin\theta\cos^2\theta\,\hat{\jmath}\right].$$

Como $\theta = 45$ grados, $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y

$$E(\vec{P}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\frac{8\sqrt{2}}{8}\right)\hat{\imath} + 4\,\frac{2\sqrt{2}}{8}\,\hat{\jmath}\right] = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}\right]$$

El campo eléctrico en P es $E(\vec{P}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}\right]$.

4. Considera un número infinito de cargas puntuales idénticas, cada una de ells con una carga q, colocadas sobre el eje X a distancias a, $2\,a$, $3\,a$, $4\,a$, ... del origen. ¿cuál es el campo electrico (como vector) en el origen? Sugerencia: Usa que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

Solución:

Tenemos una collección infinita de cargas eléctricas punutales. Por el principio de superposición el campo eléctrico es la suma de los campos eléctricos de cada una de ellas; es decir, $\vec{E}(0,0,0) = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q}{(j\,a)^2}\,\hat{\imath}$, ya que el punto $\vec{r}$ donde deseamos calcular el campo es el origen y la distancia de la j-esima carga al origen es $j\,a$.

Tenemos ahora entonces que

$$\vec{E}(0,0,0) = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q}{(j\,a)^2}\,\hat{\imath} = -\hat{\imath}\,\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{a^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2},$$

pero sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$, así que

$$\vec{E}(0,0,0) = -\hat{\imath}\,\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{a^2}\,\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{\pi^2\,q}{6\,a^2}\,\hat{\imath}$$

Resumiendo, el campo eléctrico en el origen es $\vec{E}(0,0,0) = -\frac{\pi\,q}{24\,\epsilon_0\,a^2}\,\hat{\imath}$.

5. Una carga eléctrica de 6 C es transferida cuasiestáticamente (muy lentamente) del punto (1,7,2) al punto (4,13,5). En todo el espacio existe un campo eléctrico dado como $\vec{E}(x,y,z) = 5\,y\,\hat{\imath} + x\,\hat{k}$ V/m. La carga es transferida a lo largo de la línea recta que está dada por la intersección de los dos planos $y = 2\,x+5$ y $x = z+1$. Determina el trabajo realizado.

Solución:

El trabajo realizado está dado por

$$W = -\int_{C(P_1-P_2)}\vec{F}\cdot\vec{dl}$$

La fuerza es $\vec{F} = q\,\vec{E}$, así que

$$W = -q\int_{C(P_1-P_2)}\vec{E}\cdot\vec{dl}.$$

La trayectoria de integración está dada por la intersección de los dos planos $y = 2\,x+5$ y $x = z-1$. Poniendo $x \to t$, tenemos $y = 2\,t+5$ y $z = t+1$, así que la línea recta es $\vec{\gamma}(t) = (t, 2\,t+5, t+1)$ con $t \in [1,4]$.

Así que el trabajo realizado es

$$W = -6 \int_1^4 \left[5\,(2\,t+5)\,\hat{i} + t\,\hat{k}\right] \cdot (1,\,2,\,1)\,dt =$$

$$-6 \int_1^4 [5\,(2\,t+5)+t]\,dt = -6 \int_1^4 (11\,t+25)\,dt = -6\,\frac{315}{2} = -945$$

Como todas las unidades son SI, el resultado final es $W = -945$ J.

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

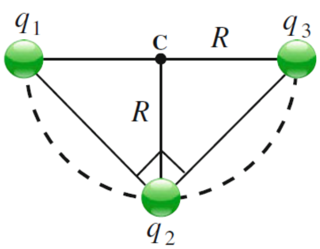
Viernes 20 de octubre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de “está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento”.
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Tres cargas puntuales de magnitud q están en un semicirculo de radio R, tal y como se muestra en la figura



. Demuestra que la fuerza neta en q_2 tiene una magnitud $\frac{k\,q^2}{\sqrt{2}\;R^2}$ y apunta hacia abajo hacía afuera del centro del semicírculo.

Solución:

Construimos un sistema de coordenadas cartesiano con q_2 en el origen. Por tanto, q_1 está en $(-R, R)$ y q_3 en (R, R).

La fuerza que q_1 ejerce en q_2 es $F_{q_1,q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{\left(\sqrt{R^2+R^2}\right)^2}\,\frac{(R,-R)}{\sqrt{R^2+R^2}} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\,\sqrt{2}\;R^2}\,(1,-1)$.

La fuerza que q_3 ejerce en q_2 es $F_{q_3,q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q_3\,q_2}{\left(\sqrt{R^2+R^2}\right)^2}\,\frac{(-R,-R)}{\sqrt{R^2+R^2}} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\,\sqrt{2}\;R^2}\,(-1,-1)$.

Por el principio de superposición, debemos sumar estas dos fuerzas para encontrar la fuerza total en la carga q_2,

$$F_{q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\,\sqrt{2}\;R^2}\,(1,-1) + \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\,\sqrt{2}\;R^2}\,(-1,-1) =$$
$$\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\,\sqrt{2}\;R^2}\,(0,-2) = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}\,(0,1)$$

En resumen, la fuerza total en q_2 es $F_{q_2} = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}\,(0,1)$; es decir, tiene magnitud $\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}$ y apunta en la dirección negativa del eje Y.

2. Una línea continua de carga yace sobre el eje X, extendiendose desde $x = +x_0$ hasta el infinito. La línea tiene una carga positiva con una densidad lineal constante. Determinar el campo eléctrico (como vector) en el origen.

Solución:

En el curso determinamos que el campo eléctrico en un punto $P(\vec{r})$ de una distribución lineal de carga eléctrica $\lambda(\vec{r})$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,d l'.$$

En este caso queremos el campo eléctrico únicamente en el origen y $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0$ constante desde $x = +x_0$ hasta el infinito. Así que,

$$\vec{E}(0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{|\vec{r}\,'|^2}\frac{\left(-\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}\,'|}\,dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{x'}{x'^3}\,dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx'}{x'^2} = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{x_0}$$

Es decir, el campo eléctrico es $\vec{E}(0) = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 x_0}\,\hat{\imath}$.

3. Una barra aislante cargada tiene una longitud $L = 2.00$ m y una sección transversal de área $A = 4.00\ \mathrm{cm}^2$. ¿Qué exceso de electrones tiene la barra si la densidad volumétrica de carga es $\rho(x) = b\,x^2$, donde $b = -2.00\,\mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^5$ y x es la distancia medida de uno de sus extremos?

Solución:

La carga total de la barra es $Q = \int_{\text{barra}}\rho(\vec{r})\,dV$. Como $\rho(\vec{r}) = \rho(x) = \left(-2.00\,\mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^5\right)x^2$, tenemos

$$Q = \int_{\text{barra}}\rho(\vec{r})\,dV = \int_{\text{barra}} b\,x^2\,dx\,dy\,dz = b\,A\int_0^L x^2\,dx = \frac{b\,A}{3}\left[x^3\right]_0^L = \frac{b\,A\,L^3}{3}.$$

Por lo tanto, la carga total de la barra es

$$Q = \frac{1}{3}\left(-2.00\times10^{-6}\ \mathrm{C}/\mathrm{m}^5\right)\times\left(4.00\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2\right)(2.00\ \mathrm{m})^3 = -2.13\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

Ahora, como la carga de cada electrón es $e = -1.602\times10^{-19}$ C, el exceso de electrones es

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{-2.13\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{-1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}} = 1.33\times10^{10}$$

Resumiendo: El número de electrones en exceso en la barra es de 1.33×10^{10}.

4. Una densidad lineal de carga empieza en $x = +x_0$ y se extienda hasta el infinito positivo. La densidad lineal de carga es $\lambda(x) = \lambda_0\,x_0/x$, siendo λ_0 una constante. Encuentra el campo eléctrico en el origen. Recuerda que el campo eléctrico es un vector

Solución:

En el curso determinamos que el campo eléctrico en un punto $P(\vec{r})$ de una distribución lineal de carga eléctrica $\lambda(\vec{r})$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,d l'.$$

En este caso queremos el campo eléctrico únicamente en el origen y $\lambda(x) = \lambda_0\,x_0/x$ desde $x = +x_0$ hasta el infinito. Así que,

$$\vec{E}(0) =$$

$$\frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x'}\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\frac{(-\vec{r}')}{|\vec{r}'|}dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x'^3}dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx'}{x'^3} = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2x_0^2} = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 x_0^2}$$

Es decir, el campo eléctrico es $\vec{E}(0) = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 x_0^2}$.

5. Dos placas metálicas paralelas y muy grandes están separadas por 1.48 cm y contienen cargas iguales pero opuestas sobre sus superficies enfrentadas. La placa negativa hace tierra y se considera que su potencial es cero. Si el potencial enmedio de las placas es de +5.52 V, ¿cuál es el campo eléctrico en la región enmedio de las placas?

Solución:

Sea σ la densidad superficial de carga eléctrica en la placa positiva y sea $-\sigma$ la densidad superficial de carga eléctrica en la placa negativa.

Sabemos que el campo eléctrico entre las dos placas es constante, con una magnitud igual a $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, es perpendicular a las placas y se dirige de la placa positiva hacía la placa negativa. Por lo tanto, el potencial electrostático es

$$\varphi(x) = -\int_{\text{placa negativa}}^{x} \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

donde x es la distnacia medida a partir de la placa negativa. Así que

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}x.$$

Sabemos que a la mitad entre las placas, el potencial es V_m, así que $\varphi(x = d/2) = V_m$, donde d es la distancia entre las placas. Igualando y despejando $\sigma = \frac{2\epsilon_0 V_m}{d}$. Por lo tanto, la magnitud del campo eléctrico es $E = \frac{2V_m}{d}$. Usando los datos del problema, tenemos $E = \frac{2\,(+5.52\text{ V})}{1.48\times10^{-2}\text{ m}} = 746\text{ V/m}$.

Resumiendo: El campo eléctrico es constante entre las dos placas, tiene una magnitud de 746 V/m, es perpendicular a ambas placas y va de la placa positiva a la placa negativa.

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

Viernes 20 de octubre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Una distribución lineal de carga tiene una distribución uniforme dada como $\lambda = 35.0$ nC/m y yace a lo largo de la línea $y = -15.0$ cm entre los puntos con coordenada $x = 0.00$ cm y $x = 40.0$ cm. ¿Cuál es el campo eléctrico (como vector) en el origen?

Solución:

En el curso determinamos que el campo eléctrico en un punto $P(\vec{r})$ de una distribución lineal de carga eléctrica $\lambda(\vec{r})$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dl'.$$

En este caso queremos el campo eléctrico únicamente en el origen y $\lambda(x) = \lambda_0$ desde $x = x_i$ hasta $x = l$. Así que,

$$\vec{E}(0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l \frac{1}{x'^2+y^2}\frac{(-x', -y, 0)}{\sqrt{x'^2+y^2}}\,dx' =$$

$$\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l \frac{(-x', -y, 0)\,dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(-\int_0^l \frac{x'\,dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}, -y\int_0^l \frac{dx'}{\left(x'^2+y^2\right)^{3/2}}, 0\right)$$

Ahora, $\int_0^l \frac{x'\,dx'}{(x'^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{l^2+y^2}}$, $\int_0^l \frac{dx'}{(x'^2+y^2)^{3/2}} = \frac{l}{y\sqrt{l^2+y^2}}$, así que

$$\vec{E}(0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{l^2+y^2}}, -\frac{l}{y\sqrt{l^2+y^2}}, 0\right)$$

Sustituyendo los valores

$$\vec{E}(0) = (-1363, 1966, 0)\,\mathrm{N/C} = \left(-1363\,\hat{\imath} + 1966\,\hat{\jmath}\right)\mathrm{N/C}$$

2. Cierta carga Q va a dividirse en dos partes $Q - q$ y q. ¿Cuál es la relación de Q a q si las dos partes, separadas por una distancia dada, han de tener una repulsión coulombiana máxima?

Solución:

La fuerza de Coulomb entre la dos cargas está dada como $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$.

En este caso la fuerza de Coulomb entre la dos cargas está dada como $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(Q-q)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$, donde ya se incluyo que la suma de las cargas sea Q, escribiendo las cargas como q y $Q-q$. La magnitud de dicha fuerza es $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(Q-q)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}$

Para determinar el máximo de esta fuerza respecto a variaciones de q, derivamos respecto a q la magnitud de la fuerza, obteniendo $\frac{dF}{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2} (Q-2q)$. El máximo se obtiene cuando la derivada es cero, así que se llega a que $q = \frac{Q}{2}$.

Podemos verificar que se trata efietivamente de un máximo sacando la segunda derivada de la magnitud de la fuerza respecto a q, y obtenemos $\frac{d^2F}{dq^2} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}$ que siempre es menor que cero, y por lo tanto efectivamente tenemos un máximo.

El resultado es $\frac{Q}{2}$.

3. Una copa hemisférica no conductora de radio interior R tiene una carga electrica total q distribuida uniformemente sobre su superficie interior. Determine el campo eléctrico en el centro de curvatura.

Solución:

El campo eléctrico de una distribución superficial de carga está dado como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2} \frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} dS'.$$

En este caso tenemos que $\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_0$, constante, la ecuación paramétrica de la esfera es $\vec{r} = R(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$, con $\phi \in [0, 2\pi)$ y $\theta \in [0, \pi/2]$ y queremos el cmpo en el origen. Por tanto,

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{R^3} R(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta) R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta).$$

Ahora, $\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$ e $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$, así que

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0}\sigma_0 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, (0, 0, 1) =$$

$$\hat{k}\, \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \hat{k}\, \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right) = \hat{k}\, \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} = \hat{k}\, \frac{q/\left(2\pi R^2\right)}{4\epsilon_0} = \hat{k}\, \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

El campo eléctrico en el origen es $\vec{E}(\vec{0}) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2}\hat{k}$.

4. Un cascarón esférico de radio 10 cm, tiene una densidad superficial uniforme de carga σ_0. A 80 cm de la superficie del cascarón, según una lineal radial, el potencial electrostático es de 1000 V. ¿Cuál es la densidad superficial

de carga σ_0 del cascarón?

Solución:

Como la distribución de carga es esfericamente simétrica, el potencial electrostático fuera del cascarón es $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$.

De donde $q = 4\pi\epsilon_0\, r\, \varphi(r)$. Además, $\sigma_0 = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi a^2}$, siendo A el área y a el radio del cascarón.

Usando las ecuaciones anteriores $\sigma_0 = \frac{\epsilon_0\, r\, \varphi(r)}{a^2}$, así que

$$\sigma_0 = \left(8.85419 \times 10^{-12}\ \text{F/m} \times 0.9\ \text{m} \times 1000\ \text{V}\right) \big/ 0.01\ \text{m}^2 = 7.965 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2$$

5. Una barra aislante cargada tiene una longitud de 2.00 metros y una sección transversal de área 4.00 cm^2. ¿qué exceso de electrones tiene la barra si la densidad volumétrica de carga es uniforme con valor $\rho(\vec{r}) = -4.00\,\mu\text{C} \big/ \text{m}^3$?

Solución:

La carga total de la barra es $Q = \int_{\text{barra}} \rho(\vec{r})\, dV$. Como $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, una constante, tenemos

$$Q = \int_{\text{barra}} \rho(\vec{r})\, dV = \int_{\text{barra}} \rho_0\, dV = \rho_0 \int_{\text{barra}} dV = \rho_0 \times \text{Volumen de la barra.}$$

El volumen de la barra es el área de la base por la altura; es decir, $V = \left(4.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^2\right) \times (2.00\ \text{m}) = 8.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$.

Por lo tanto, la carga total de la barra es

$$Q = \left(-4.00 \times 10^{-6}\ \text{C} \big/ \text{m}^3\right) \times \left(8.00 \times 10^{-4}\ \text{m}^3\right) = -3.20 \times 10^{-9}\ C.$$

Ahora, como la carga de cada electrón es $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C, el exceso de electrones es

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{-3.20 \times 10^{-9}\ \text{C}}{-1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 2.00 \times 10^{10}$$

Resumiendo: El número de electrones en exceso en la barra es de 2.00×10^{10}.

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica INAOE

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

Viernes 20 de octubre de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de “está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento”.
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Un disco circular de radio R tiene una densidad superficial de carga eléctrica que se incrementa linealmente desde el centro del disco, siendo k la constante de proporcionalidad. Determina la carga total en el disco. Todas las cantidades están dadas en unidades SI.

Solución:

Que la densidad superficial de carga eléctrica se incremente linealmente desde el centro del disco, siendo k la constante de proporcionalidad, quiere decir, que $\sigma(r) = k\,r$.

La carga total está dada por $Q = \int_{\text{Disco}} \sigma(\vec{r})\, dS$. En este caso la densidad superficial de carga es $\sigma(\vec{r}) = k\,r$ C, y $dS = 2\,\pi\,r\,dr$, así que

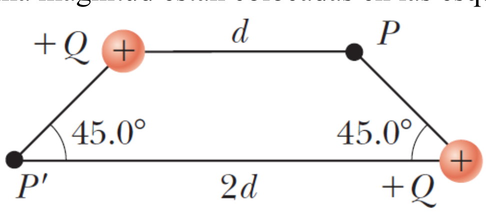
$$Q = \int_0^R (k\,r)\,2\,\pi\,r\,dr = 2\,\pi\,k \int_0^R r^2\,dr = 2\,\pi\,k \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^R = \frac{2\,\pi\,k\,R^3}{3}$$

La cargo total es

$$Q = \frac{2\,\pi\,k\,R^3}{3}$$

Si todas las cantidades están expresadas en el sistema de unidades SI, la carga total estará dada en Coulombs.

2. Dos cargas positivas de la misma magnitud están colocadas en las esquinas opuestas de un trapezoide, tal y como se muestra en la figura adjunta

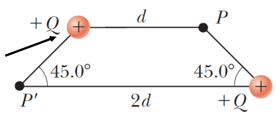


. Encuentra el campo eléctrico en el punto P' (atención es en el punto P' con una prima)

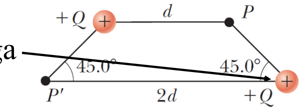
Solución:

(a)

El campo que esta carga



produce en P es $\vec{E}_1(\vec{P}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{d^2}\,\hat{\imath}$

Para calcular el campo que produce esta carga 

primero debemos de calcular su distancia a P; llamemos x_1 a dicha distancia. Del dibujo es claro que $\cos\theta = \frac{d/2}{x_1}$, donde al ángulo le he llamado θ; así que $x_1 = \frac{d}{2\cos\theta}$. La magnitud del campo este será entonces $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{d}{2\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^2\theta}{d^2}$. Este campo tiene componente horizontal, que se obtiene multiplicando por el coseno de θ y una componente vertical que se obtiene multiplicando por el seno de θ. Finalmente el campo es $\vec{E}_2(\vec{P}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^3\theta}{d^2}\hat{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q\cos^2\theta\sin\theta}{d^2}\hat{j}$.

Sumando ahora los dos campos,

$$E(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{d^2}\hat{i} - \frac{4Q\cos^3\theta}{d^2}\hat{i} + \frac{4Q\cos^2\theta\sin\theta}{d^2}\hat{j}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-4\cos^3\theta\right)\hat{i} + 4\sin\theta\cos^2\theta\,\hat{j}\right].$$

Como $\theta = 45$ grados, $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y

$$E(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\frac{8\sqrt{2}}{8}\right)\hat{i} + 4\,\frac{2\sqrt{2}}{8}\hat{j}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j}\right]$$

El campo eléctrico en P es $E(\vec{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j}\right]$.

(b) El campo en P' se calcula de una manera completamente similar al campo en P y se obtiene

$$E(\vec{P}) = k\left[-\frac{Q}{4d^2}\hat{i} - \frac{Q}{\left(\frac{d}{2\cos\theta}\right)^2}\cos\theta\,\hat{i} - \frac{Q}{\left(\frac{d}{2\cos\theta}\right)^2}\sin\theta\,\hat{j}\right] =$$
$$-\frac{kQ}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4}+4\cos^3\theta\right)\hat{i} + 4\sin\theta\cos^2\theta\,\hat{j}\right] = -\frac{kQ}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4}+4\,\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)\hat{i} + 4\,\frac{2\sqrt{2}}{8}\hat{j}\right]$$
$$= -\frac{kQ}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4}+\sqrt{2}\right)\hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j}\right] = -\frac{kQ}{4d^2}\left[\left(1+4\sqrt{2}\right)\hat{i} + 4\sqrt{2}\,\hat{j}\right]$$

3. Una densidad lineal de carga empieza en $x = +x_0$ y se extienda hasta el infinito positivo. La densidad lineal de carga es $\lambda(x) = \lambda_0\, x_0 / x$, siendo λ_0 una constante. Encuentra el campo eléctrico en el origen. Recuerda que el campo eléctrico es un vector

Solución:

En el curso determinamos que el campo eléctrico en un punto $P(\vec{r})$ de una distribución lineal de carga eléctrica $\lambda(\vec{r})$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dl'.$$

En este caso queremos el campo eléctrico únicamente en el origen y $\lambda(x) = \lambda_0\, x_0 / x$ desde $x = +x_0$ hasta el infinito. Así que,

$$\vec{E}(0) =$$

$$\frac{\lambda_0\, x_0}{4\,\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x'}\,\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\,\frac{(-\vec{r}')}{|\vec{r}'|}\,dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\,\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x'^3}\,dx' = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\,\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx'}{x'^3} = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2\,x_0^2} = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{8\,\pi\epsilon_0\,x_0^2}$$

Es decir, el campo eléctrico es $\vec{E}(0) = -\hat{\imath}\,\frac{\lambda_0}{8\,\pi\epsilon_0\,x_0^2}$.

4. Un potencial electrostático está dado como $\varphi(x, y, z) = 2\,x\,y^3 - 3\,z^2$ V. Determina el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución:

En el curso determinamos que

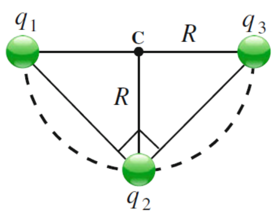
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}).$$

Así que en este caso tenemos,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\,x\,y^3 - 3\,z^2\right) = -\left(2\,y^3, 6\,x\,y^2, -6\,z\right) = \left(-2\,y^3, -6\,x\,y^2, 6\,z\right).$$

Así que el campo eléctrico es $\vec{E}(x, y, z) = -2\,y^3\,\hat{\imath} - 6\,x\,y^2\,\hat{\jmath} + 6\,z\,\hat{k}$ V/m.

5. Tres cargas puntuales de magnitud q están en un semicirculo de radio R, tal y como se muestra en la figura



. Demuestra que la fuerza neta en q_2 tiene una magnitud $\frac{k\,q^2}{\sqrt{2}\;R^2}$ y apunta hacia abajo hacía afuera del centro del semicírculo.

Solución:

Construimos un sistema de coordenadas cartesiano con q_2 en el origen. Por tanto, q_1 está en $(-R, R)$ y q_3 en (R, R).

La fuerza que q_1 ejerce en q_2 es $F_{q_1,q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{\left(\sqrt{R^2+R^2}\right)^2}\,\frac{(R,-R)}{\sqrt{R^2+R^2}} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\sqrt{2}\;R^2}\,(1, -1)$.

La fuerza que q_3 ejerce en q_2 es $F_{q_3,q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q_3\,q_2}{\left(\sqrt{R^2+R^2}\right)^2}\,\frac{(-R,-R)}{\sqrt{R^2+R^2}} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\sqrt{2}\;R^2}\,(-1, -1)$.

Por el principio de superposición, debemos sumar estas dos fuerzas para encontrar la fuerza total en la carga q_2,

$$F_{q_2} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\sqrt{2}\;R^2}\,(1, -1) + \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\sqrt{2}\;R^2}\,(-1, -1) =$$
$$\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{2\sqrt{2}\;R^2}\,(0, -2) = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}\,(0, 1)$$

En resumen, la fuerza total en q_2 es $F_{q_2} = -\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}\,(0, 1)$; es decir, tiene magnitud $\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\sqrt{2}\;R^2}$ y apunta en la dirección negativa del eje Y.