Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica. INAOE.

Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

Viernes 9 de junio de 2017

INSTRUCCIONES:

1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Dos esferas conductoras, de radios $R_1 = 0.2$ m y $R_2 = 0.1$ m, tiene cargas $q_1 = 6\times10^{-8}$ C y $q_2 = -2\times10^{-8}$ C, respectivamente, y la distancia entre ellas es mucho mayor que sus radios. Cuando se conectan con un alambre conductor, ¿cuáles son sus cargas finales?

Solución:

Sean q_1' y q_2' las cargas que tendran las esferas después de conectarlas. El potencial de la primera esfera será $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'}{R_1}$ y el de la segunda $\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2'}{R_2}$; la diferencia de potencial debe ser cero, es decir, $\Delta V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1'}{R_1} - \frac{q_2'}{R_2}\right) = 0$, o lo que es lo mismo $\frac{q_1'}{R_1} - \frac{q_2'}{R_2} = 0$. En el proceso de conectar las dos esferas no se introduce ninguna carga al sistema, así que la carga total deberá conservarse, lo que lleva a la ecuación $q_1' + q_2' = q_1 + q_2$.

Tenemos entonces dos ecuaciones y dos incógnitas y podemos resolverlas, obteniendo

$$q_1' = (q_1 + q_2)\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad q_2' = (q_1 + q_2)\frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Utilizando los datos proporcionados en el problema, encontramos que

$$q_1' = 2.667\times10^{-8}\ \mathrm{C}, \quad q_2' = 1.333\times10^{-8}\ C.$$

2. Se tiene el potencial eléctrico descrito en coordenadas cilíndricas como $\varphi = a(3R - 2\rho)\rho\cos\theta$ para $\rho \leq R$ y $\varphi = \frac{a R^3}{\rho}\cos\theta$ para $\rho \geq R$, siendo a y R constantes. Determina la distribución volumétrica de carga eléctrica que produce este campo eléctrico.

Solución:

La ecuación de Poisson establece que $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$, así que $\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\varphi$.

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

así que para $\rho \leq R$,

$$\begin{aligned}
\rho &= -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] a(3R - 2\rho)\rho\cos\theta = \\
&\quad -\varepsilon_0\, a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[3R\rho - 2\rho^2\right]\right) - \varepsilon_0\,\frac{a(3R - 2\rho)\rho}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2} \\
&= -\varepsilon_0\, a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(3R\rho - 4\rho^2\right) + \varepsilon_0\,\frac{a(3R - 2\rho)\rho}{\rho^2}\cos\theta = -\varepsilon_0\, a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}(3R - 8\rho) + \varepsilon_0\,\frac{a(3R - 2\rho)}{\rho}\cos\theta \\
&= -\varepsilon_0\, a\cos\theta\,\frac{1}{\rho}(3R - 8\rho - 3R + 2\rho) = 6\,\varepsilon_0\, a\cos\theta.
\end{aligned}$$

Para $r > R$,

$$\begin{aligned}
\rho &= -\varepsilon_0\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{a R^3}{\rho}\cos\theta = -\varepsilon_0\left[aR^3\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a R^3}{\rho}\,\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial\theta^2}\right] \\
&= -\varepsilon_0\left[-aR^3\cos\theta\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{a R^3}{\rho}\,\frac{\cos\theta}{\rho^2}\right] = \\
&\quad -\varepsilon_0\, aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^3}\right] = \varepsilon_0\, aR^3\cos\theta\left[-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho^3}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\rho(r,\theta) = \begin{cases} 6\,\varepsilon_0\, a\cos\theta & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Otra solución (que en esencia es la misma, pero en dos pasos):

Primeramente debemos determinar el campo eléctrico. Si conocemos el potencial electrostático, tenemos que $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$\nabla = \hat{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\theta}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

asi que

$$\vec{E} = a(-3R + 4\rho)\cos\theta\,\hat{\rho} + a(3R - 2\rho)\sin\theta\,\hat{\theta} \quad \text{para } r < R,$$

y

$$\vec{E} = \frac{a R^3}{\rho^2} \left(\cos\theta \,\hat{\rho} + \sin\theta \;\hat{\theta}\right) \;\; \text{para } r > R.$$

Para calcular la densidad volumétrica de carga eléctrica, usamos ahora la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Evaluamos la divergencia en coordenadas cilíndricas del campo eléctrico que encontramos arriba

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

obteniendo

$$\nabla \cdot \vec{E} = 6\, a \cos\theta \;\; \text{para } r < R,$$

y

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \;\; \text{para } r > R.$$

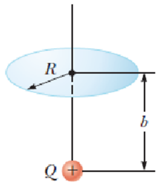
Así que finalmente, la densidad volumétrica de carga es

$$\rho = 6\, \varepsilon_0\, a \cos\theta \;\; \text{para } r < R,$$

y

$$\rho = 0 \;\; \text{para } r > R.$$

3. Una partícula de carga Q está localizada en el eje de un círculo de radio R a una distancia b del plano del círculo, como se indica en la figura adjunta. Muestra que si una decima parte del flujo del campo eléctrico de la carga pasa a través del círculo, entonces $R = \frac{3b}{4}$.



Solución:

Primero hay que demostrar que el flujo de campo eléctrico a través del círculo en cuestion es igual al flujo de campo eléctrico a través del cascarón esférico que tiene a su circunferencia como límite y que tiene su centro en la carga. eso se logra utlizando la ley de Gauss. Efectivamente, construimos la superficie cerrada formada por el círculo y por el cascarón esférico; el flujo a través de dicha superficie cerrada es cero, ya que la carga neta encerrada es cero. Por lo tanto, el flujo a través del circulo y el flujo a través del cascarón esférico son iguales.

El calculo del flujo a través del cascarón esférico es muy sencillo, ya que sobre él el campo es constante. Para determinar su área debemos determinar primero su radio a; del dibujo es evidente que $a = \sqrt{b^2 + R^2}$, y su área A es

$$A = (b^2 + R^2) \int_0^{\arctan(R/b)} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi(b^2 + R^2) \int_0^{\arctan(R/b)} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(b^2 + R^2)[-\cos\theta]_0^{\arctan(R/b)}$$
$$= 2\pi(b^2 + R^2)\{1 - \cos[\arctan(R/b)]\} = 2\pi(b^2 + R^2)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}\right)$$

Por lo tanto, el flujo de campo eléctrico a través del cascarón esférico es

$$\Phi_E = 2\pi(b^2 + R^2)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{b^2 + R^2} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}\right),$$

que es el mismo que pasa a través del círculo de la figura.

Finalmente tenemos que el flujo debe ser la décima parte del flujo total, que es $Q/10\,\varepsilon_0$, así que

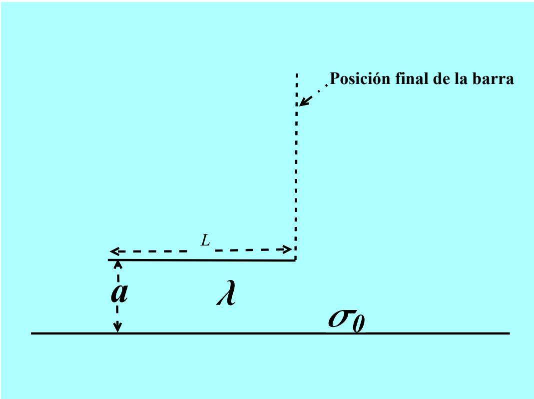
$$\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}\right) = \frac{Q}{10\,\varepsilon_o},$$

o sea,

$$R = \frac{3b}{4}$$

tal y como se quería demostrar.

4. Una varilla muy delgada de longitud L y con una densidad lineal de carga eléctrica λ se encuentra colocada paralelamente a un plano infinito que tiene una distribución superficial de carga eléctrica uniforme σ_0. ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar la varilla y ponerla en una posición vertical?



Solución:

Un pedazo de la linea de carga está originalmente al potencial $\varphi = \frac{\sigma_0}{2\,\epsilon_0}\,a$.

Cuando ese pedazo queda vertical, el potencial es $\varphi = \frac{\sigma_0}{2\,\epsilon_0}\,(a - \xi)$

La diferencia de potencial es $\Delta\varphi = -\frac{\sigma_0}{2\,\epsilon_0}\,\xi$

Integro sobre la varilla $\quad -\frac{\sigma_0}{2\,\epsilon_0}\,\lambda \int_0^l \xi\, d\xi = -\frac{\lambda\, l^2\, \sigma_0}{4\,\epsilon_0}$.

Por lo tanto, el trabajo realizado es de $-\frac{\lambda\, l^2\, \sigma_0}{4\,\epsilon_0}$

5. Una barra dieléctrica tiene la forma de un cilindro de longitud L y de radio R. Dicha barra se polariza en la dirección de su eje; si la polarización es uniforme y de magnitud P, calcula el campo eléctrico resultante en los puntos del eje de la barra, pero fuera de ella.

Solución:

Pensemos que el eje del cilindro coincide con el eje Z y que el origen de coordenadas está justo a la mitad del cilindro. Podemos entonces escribir la polarización como $\vec{P} = P_0\,\hat{z}$ donde $\hat{z}$ es el vector unitario en la dirección del eje Z y P_0es una constante.

La densidad volumétrica de carga de polarización está dada como $\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$. Como la polarización es uniforme, $\rho_P = 0$.

La densidad supericial de carga de polarización es $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$. Como la polarización es paralela al eje del cilindro, es claro que no hay carga de polarización superficial en la cara lateral del cilindro. En las caras circulares la polarización sera, $\sigma_1 = -P_0$ en la de “abajo” y $\sigma_2 = P_0$ en la de arriba.

Asi que la situación se reduce a dos discos de radio R uniformemente cargados, uno en el plano $z = -L/2$ y el otro en el plano $z = L/2$.

La magnitud del campo eléctrico en el eje de un disco de radio a y densidad superficiel de carga eléctrica σ_0 es $E(z) = \frac{\sigma_0}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$. Así que usando el principio de superposición encontramos que

para $z > L/2$, $-\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z+L}{\sqrt{R^2+(z+L)^2}}\right) + \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right) = \frac{z+L}{\sqrt{R^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}$

y para $z < -L/2$, $-\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right) + \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z+L}{\sqrt{R^2+(z+L)^2}}\right) = -\frac{z+L}{\sqrt{R^2+(z+L)^2}} + \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}$

6. Si se tiene un conductor cilíndrico de longitud L y de sección transversal de área A, hecho de un material conductor óhmico (es decir, un material que satisface la ley de Ohm) con resistividad ρ, su resistencia es $R = \rho \frac{L}{A}$. Usa esta información para determinar la resistencia de un cilíndro semiconductor, que podemos considerar también como óhmico, de longitud L y sección transversal de área A cuya resistividad varia a lo largo de su eje como $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/L)$.

Solución:

Si se tiene un conductor cilíndrico de longitud L y sección transversal de área A, hecho de un material conductor óhmico (es decir, un material que satisface la ley de Ohm) con resistividad ρ, su resistencia es $R = \rho \frac{L}{A}$. Usa esta información para determinar la resistencia de un cilíndro semiconductor, que podemos considerar también como óhmico, de longitud L y sección transversal de área A cuya resistividad varia a lo largo de su eje como $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/L)$.

Solución:

Lo que hacemos es rebanar al cilindro transversalmente en peqeñas rodajas de ancho Δz. Cada uno de esos “pequeños cilindros” tendra una resistencia

$$\Delta R = \rho_0 \exp(-z/L) \frac{\Delta z}{A}.$$

Finalmente, la resistencia total la encontramos integrando con respecto a z desde $z = 0$ hasta $z = L$,

$$R = \frac{\rho_0}{A} \int_0^L \exp(-z/L)\, dz = \frac{L\rho_0}{A}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

La resistencia del cilindro es $R = \frac{L\rho_0}{A}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.