Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica. INAOE.

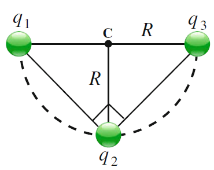
Curso propedéutico de teoría electromagnética. Primer examen parcial

Viernes 26 de mayo de 2017

INSTRUCCIONES:

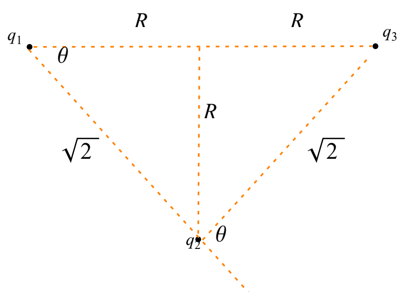
1. Lee atentamente los problemas.
2. Resuelve cada problema en un conjunto separado de hojas. No mezcles diferentes problemas.
3. Explica claramente tu procedimiento y tus pasos. Expón claramente el resultado final del problema.
4. Es importante encontrar el resultado correcto. No vale eso de "está mal el resultado, pero hice bien el procedimiento".
5. Por favor, ponganle nombre a todas sus hojas.
6. Pueden consultar libremente cualquier material impreso (libros, notas, formularios, etc).
7. No pueden usar ningún aparato electrónico que se conecte a Internet ni a la red de celulares (computadoras, tablets, teléfonos celulares)

PROBLEMAS:

1. Tres cargas eléctricas iguales y de magnitud q están colocadas en un semicírculo de radio R como se muestra en la figura 

. Encuentra cuál es la fuerza que siente la carga q_2.

Solución:



La fuerza que siente la carga q_2 debido a la carga q_1 es $\vec{F}_{2,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2R^2}\frac{(R,-R)}{\sqrt{2}\,R}$, donde hemos colocado un sistema de coordenados cartesiano centrado en la carga q_2 y tal que las coordenadas de la carga q_1 son $(-R, R)$.

La fuerza que siente la carga q_2 debido a la carga q_3 es $\vec{F}_{2,3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{2R^2}\frac{(-R,-R)}{\sqrt{2}\,R}$, dado que las coordenadas de la carga q_3 son (R, R).

Usando el principio de superposición sabemos que la fuerza sobre la carga q_2 es la suma vectorial de las dos fuerzas anteriors; es decir,

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2R^2}\frac{(R,-R)}{\sqrt{2}\,R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2R^2}\frac{(-R,-R)}{\sqrt{2}\,R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\,q_1 q_2}{2\sqrt{2}\,R^2}(0,1)$$

Como $q_1 = q_2 = q_3 = q$, tenemos finalmente que

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}\,R^2}\hat{j}$$

Es decir, la fuerza tiene una magnitud $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}\,R^2}$ y apunta verticalmente hacía abajo.

2. Se cargan electricamente dos esferas metálicas de diferentes tamaños, de manera tal que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una de ellas. El radio de la esfera A es el triple que el de la esfera B. Sean Q_A y Q_B las cargas eléctricas en cada una de las dos esferas, y sean E_A y E_B las magnitudes del campo eléctrico en la superficie de cada una de las dos esferas. ¿Cuál es (a) la razón Q_A / Q_B y (b) la razón E_A / E_B?

Solución:

(a)

El potencial eléctrico en la superficie de la esfera A es $\varphi_A(r = R_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{R_A}$.

El potencial eléctrico en la superficie de la esfera B es $\varphi_B(r = R_B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_B}{R_B}$.

El problema nos dice que $R_A = 3\,R_B$, así que $\varphi_A(r = R_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{R_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{3\,R_B}$.

Como los dos potenciales son iguales, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{3\,R_B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_B}{R_B}$, de donde $\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{1}{3}$.

(b)

El campo eléctrico en la superficie de la esfera A es $E_A(r = R_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{R_A{}^2}$.

El campo eléctrico en la superficie de la esfera B es $E_B(r = R_B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_B}{R_B{}^2}$.

El problema nos dice que $R_A = 3\,R_B$, así que $E_A(r = R_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{R_A{}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_A}{9\,R_B{}^2}$.

Por lo tanto, la razón de los campos es $\frac{E_B}{E_A} = \frac{\frac{Q_B}{R_B{}^2}}{\frac{Q_A}{9\,R_A{}^2}} = 9\,\frac{Q_B}{Q_A} = 9 \times \frac{1}{3} = 3$.

3. Un cascarón esférico de radio 10 cm, tiene una densidad superficial uniforme de carga σ_0. A 80 cm de la superficie del cascarón, según una lineal radial, el potencial electrostático es de 1000 V. ¿Cuál es la densidad superficial de carga σ_0 del cascarón?

Solución:

Como la distribución de carga es esfericamente simétrica, el potencial electrostático fuera del cascarón es $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$.

De donde $q = 4\pi\epsilon_0\, r\, \varphi(r)$. Además, $\sigma_0 = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi a^2}$, siendo A el área y a el radio del cascarón.

Usando las ecuaciones anteriores $\sigma_0 = \frac{\epsilon_0\, r\, \varphi(r)}{a^2}$, así que

$$\sigma_0 = \left(8.85419\times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}\times 0.9\ \mathrm{m}\times 1000\ \mathrm{V}\right)\Big/\, 0.01\ \mathrm{m}^2 = \ 7.965\times 10^{-7}\ \mathrm{C/m}^2$$

4. ¿A qué distancia a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado de radio R es igual la intensidad del campo eléctrico a un medio del valor del campo en la superficie del disco en el centro?

Solución:

El campo eléctrico a lo largo del eje de un disco cargado uniformemente es

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\theta}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}(-r\cos\theta, -r\sin\theta, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\hat{k}\,2\pi\sigma_0 z \int_0^R \frac{r\,dr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\hat{k}\,2\pi\sigma_0 z \begin{cases} \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} & z>0 \\ -\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} & z<0 \end{cases} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\hat{k}\,2\pi\sigma_0 \begin{cases} 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} & z>0 \\ -1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} & z<0 \end{cases}.$$

Así que para la parte superior del disco el campo eléctrico es $\vec{E}(z) = \hat{k}\,\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$. En la superficie del disco por la parte de arriba y en el centro el campo vale entonces $E(z=0) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$.

Debemos determinar ahora para que valor de z el campo vale la mitad de eso; es decir, para que valor de z, $E(z) = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0}$.

Tenemos entonces

$$\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0}$$

que resolviendo para z da dos resultados posibles, $\frac{R}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{R}{\sqrt{3}}$. Dado que estamos interesados únicamente en la parte de arriba del disco, el resultado es $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

5. Una esfera tiene en su superficie una distribución de carga eléctrica $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Calcula el campo eléctrico en su centro.

Solución:

Queremos calcular el campo en el centro de la esfera, donde colocamos el origne de nuestro sistemas de coordenadas esféricas. Por tanto, queremos calcular el campo en $\vec{r} = (0, 0, 0)$.

Un punto arbitrario sobre la superficie de la esfera cargada tiene coordenadas esféricas $(R \cos\phi \sin\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\theta)$, siendo R el radio de la esfera y los ángulos $\theta \in [0, \pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, los ángulos polar y azimutal, respectivamente.

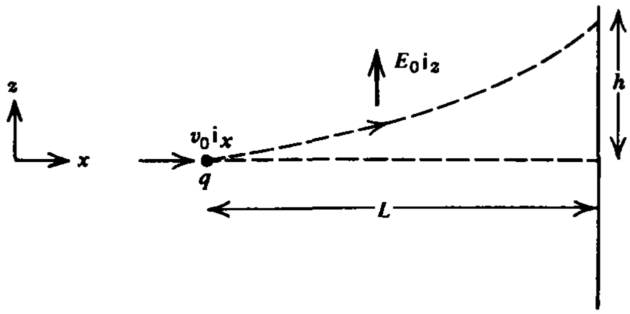
Así que

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cascarón}} \frac{\sigma_0 \cos\theta}{R^2} \frac{1}{R} (R \cos\phi \sin\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} (0, 0, 1) \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \int_0^{\pi} \text{Cos}[\theta]^2 * \text{Sin}[\theta] \, d\theta = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\sigma_0}{3} \hat{k}$$

El campo eléctrico en el centro de la esfera es $\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \hat{k}$; es decir, apunta hacía el polo norte.

6. Una carga q de masa m con una velocidad inicial $\vec{v} = v_0\,\hat{i}_x$ es lanzada en $x = 0$ en una región donde existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\,\hat{i}_z$. Una pantalla es colocada a una distancia $x = L$. ¿A qué altura h pega la carga en la pantalla? Desprecia los efectos de la gravedad.



Solución:

En la dirección horizontal la carga se mueve con una velocidad uniforme, ya que en esa dirección no actúa ninguna fuerza. El tiempo que tarda la partícula en llegar a la pantalla es $t = \frac{L}{v_0}$.

En la dirección vertical se trata de un movimiento uniformemente acelerado. La aceleración está dada como $a = \frac{F}{m} = \frac{q\,E_0}{m}$. Tomando la posición vertical inicial como cero y sabiendo que la velocidad inicial vertical es cero, tenemos que $h = \frac{1}{2}\,a\,t^2$, o sea, $h = \frac{1}{2}\,\frac{q\,E_0}{m}\,\frac{L^2}{v_0^2}$.

Resumiendo, la partícula caragada pega a una altura $h = \frac{1}{2}\,\frac{q\,E_0}{m}\,\frac{L^2}{v_0^2}$